

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**A Regularidade de Castelnuovo-Mumford de Módulos
sobre Anéis de Polinômios**

Júnio Teles dos Santos

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2018.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

A Regularidade de Castelnuovo-Mumford de Módulos sobre Anéis de Polinômios

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Júnio Teles dos Santos

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2018.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.


**A regularidade de Castelnuovo-Mumford de módulos sobre
anéis de polinômios**

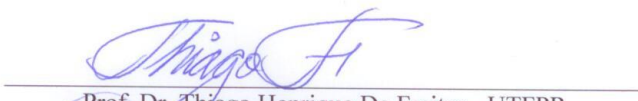
por

Júnio Teles dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:


Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador


Prof. Dr. Andre Vinicius Santos Doria - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Thiago Henrique De Freitas - UTFPR
Segundo Examinador

São Cristóvão, 20 de Fevereiro de 2018

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S237r Santos, Júnio Teles dos
A regularidade de Castelnuovo-Mumford de módulos sobre anéis de polinômios / Júnio Teles dos Santos ; orientador Zaquel Alves Ramos. – São Cristóvão, 2018.
82 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Ideais (Álgebra). 4. Polinômios.
5. Função característica. I. Ramos, Zaquel Alves, orient. II. Título.

CDU: 512

Conteúdo

1	Funções de Hilbert e de Hilbert-Samuel	11
1.1	Anéis e Módulos Graduados	11
1.2	Filtrações e Lema de Artin-Rees	15
1.3	Função e Polinômio de Hilbert	18
1.4	Polinômio de Hilbert-Samuel	22
1.5	Dimensão e Sistemas de Parâmetros de um Módulo	28
2	Módulos Cohen-Macaulay	31
2.1	Sequências Regulares	31
2.2	Grade e Profundidade	36
2.3	A Fórmula de Auslander-Buchsbaum	42
2.4	Anéis e Módulos Cohen-Macaulay	46
2.5	Anéis Regulares	49
3	Os Números Graduados de Betti	52
3.1	Números de Betti e Função de Hilbert	52
3.2	Ideais Monomiais e Complexos Simpliciais	56
3.3	O Teorema das Sizígias de Hilbert	59
4	Um Pouco sobre Cohomologia Local	65
4.1	Os Funtores de I -Torção	65
4.2	Cohomologia Local como Limite Direto	69
4.3	Cohomologia Local e Complexo de Čech	70
4.4	Dualidade Local e Teorema da Nulidade	73
5	A Regularidade de Castelnuovo-Mumford	78
5.1	Definição de Regularidade por Sizígias	78
5.2	Regularidade por Cohomologia Local	80
5.3	O Caso Artiniano	85
5.4	O Caso Cohen-Macaulay	86
6	Apêndice	88
6.1	Módulos Projetivos e Injetivos	88
6.2	Resoluções e Funtores Derivados	90

Resumo

David Mumford introduziu o conceito de regularidade de um feixe coerente no espaço projetivo em termos de cohomologia local, generalizando um argumento clássico de Castelnuovo. Nessa dissertação sob a visão da álgebra comutativa, introduziremos o conceito de regularidade de módulos graduados finitamente gerados sobre o anel de polinômios. Primeiramente realizamos um estudo preliminar sobre teoria da dimensão e em especial sobre a função de Hilbert. Também estudamos noções básicas em módulos Cohen-Macaulay, propriedades dos números graduados de Betti e dos funtores de cohomologia local. No capítulo principal, definimos a regularidade de Castelnuovo-Mumford utilizando os shifts de resoluções livres. Logo após, mostramos que a definição de regularidade pode ser dada em termos de cohomologia local, dando ênfase aos casos de módulos Artinianos e Cohen-Macaulay.

Palavras Chave: Regularidade, função de Hilbert, módulo Cohen-Macaulay, sizígias, cohomologia local.

Abstract

David Mumford introduced the concept of regularity of a coherent beam into the projective space in terms of local cohomology, generalizing a classic argument of Castelnuovo. In this dissertation under view of commutative algebra, we will introduce the concept of regularity of finitely generated graduated modules on the ring of polynomials. First, we perform a preliminary study on dimension theory and especially on Hilbert's function. We also studied the basics of Cohen-Macaulay modules, properties of Betti's graduated numbers, and the local cohomology functors. In the main chapter, we define the regularity of Castelnuovo-Mumford using the free resolution shifts. Soon after, we show that the definition of regularity can be given in terms of local cohomology, with emphasis on the cases of Artinian and Cohen-Macaulay modules.

Keywords: Regularity, Hilbert function, Cohen-Macaulay module, syzygy, local cohomology.

Lista de símbolos

Símbolo	Descrição
$\text{gr}_{\mathfrak{F}}(R)$	anel graduado associado de R com respeito a filtração \mathfrak{F}
$\Delta f(-)$	operador diferença da função f
$V(I)$	conjunto dos ideais primos que contêm o ideal I
$\ell_R(M)$	comprimento do R -módulo M
$\text{ht } I$	altura do ideal I
$\dim_k V$	dimensão do k -espaço vetorial V
$\text{rank}(F)$	posto do módulo livre F
$\text{Supp}(M)$	suporte do módulo M
$\text{Ass } M$	conjunto dos primos associados do módulo M
$\text{ann } M$	anulador do módulo M
$h_R(M, -)$	função de Hilbert do R -módulo graduado M
$s_I(M, -)$	função de Hilbert-Samuel com respeito ao ideal de definição I
$\dim M$	dimensão de Krull do módulo M
$\delta(M)$	dimensão de Chevalley do módulo M
$\lambda(M)$	grau do polinômio de Hilbert-Samuel do módulo M
$J(R)$	radical de Jacobson do anel R
$\text{Ext}_R^i(-, -)$	i -ésimo bifuntor extensão
$\text{Tor}_i^R(-, -)$	i -ésimo bifuntor torção
$\text{grade}(I, M)$	grade do ideal I sobre o módulo M
$\text{depth } M$	profundidade do módulo M
$\text{pd}_R(M)$	dimensão projetiva do R -módulo M
$\mu(M)$	número mínimo de geradores do módulo M
$\mathcal{C}(\Delta)$	complexo obtido do complexo simplicial Δ
$H_i(\Delta, k)$	i -ésima homologia reduzida do complexo simplicial Δ
$\bigwedge^i(M)$	i -ésima potência exterior do módulo M
$\Gamma_I(-)$	funtor de I -torção
$H_I^i(-)$	i -ésimo funtor de cohomologia local em relação ao ideal I
$C(x_1, \dots, x_t; M)$	complexo de Čech do módulo M com respeito ao ideal $I = (x_1, \dots, x_t)$
M^\vee	módulo dual do módulo M
$\text{reg } M$	regularidade de Castelnuovo-Mumford do módulo M

Introdução

Os primeiros traços da existência da regularidade de Castelnuovo-Mumford apareceram no século XIX, muito antes de sua definição formal. No artigo “*Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*”[1893], Guido Castelnuovo (1865-1952) estudando certas séries lineares sobre o espaço projetivo \mathbb{P}^3 , propõe o *problema da postulação*: qual a dimensão de séries lineares sobre uma curva algébrica X de grau d que são cortadas por superfícies de grau f ? Perguntar sobre tal dimensão é igual a perguntar: quantas condições lineares a curva X impõe a superfície S que contém X . Esse problema pode ser tratado em condições homológicas pensando na sobrejetividade de certos mapas entre módulos de cohomologia.

Inspirado nos trabalhos de Castelnuovo, David Mumford em 1966, escreve formalmente a primeira definição da regularidade, utilizando cohomologia de feixes coerentes sobre o espaço projetivo: um feixe coerente \mathfrak{F} sobre \mathbb{P}_k^n é dito *m-regular no sentido de Castelnuovo* se

$$H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathfrak{F}(m - i)) = 0$$

para todo $i > 0$ e a *regularidade* do feixe \mathfrak{F} é o ínfimo dos números inteiros m , tais que \mathfrak{F} é *m-regular*.

A regularidade também se tornou um conceito fundamental na álgebra comutativa. O artigo “*Über die Theorie der algebraischen Formen*”[1890], por David Hilbert (1862-1943) fundamenta a teoria de resoluções livres de ideais, utilizando o célebre teorema das sizíguas (Teorema 3.3.9). Em 1982, Akira Ooishi definiu por meio de cohomologia local a regularidade de módulos graduados finitamente gerados, que foi introduzido por Alexander Grothendieck (1928-2014). Alguns anos depois, David Eisenbud e Shiro Goto utilizando o teorema das sizíguas de Hilbert, mostram que a definição dada por Akira Ooishi está intimamente ligada com resoluções livres minimais e seus números de Betti.

Uma situação em que a regularidade de Castelnuovo-Mumford pode ser aplicada está na pergunta: quando a função de Hilbert torna-se polinomial? Veremos no Capítulo 3, uma boa resposta através dos números de Betti. No Capítulo 5, mostraremos que a regularidade controla tal situação, sendo que no caso de módulos Cohen-Macaulay, isto fica muito bem determinado: podemos calcular o menor número inteiro em que a função de Hilbert vem a concordar com o seu polinômio utilizando a regularidade e a profundidade do módulo.

Além de sua importância histórica e de seu papel fundamental em álgebra comutativa e geometria algébrica, um dos motivos determinantes para a escolha deste tema é deixar uma referência para estudantes que pretendem iniciar um estudo em tal conteúdo, uma vez que existem poucos textos com este assunto na literatura, especialmente na literatura brasileira.

Os pré-requisitos básicos para um melhor entendimento dessa dissertação, em sua essência é um primeiro curso de álgebra comutativa, em conteúdos como: primos associados, suporte,

decomposição primária, localização, produto tensorial, módulos planos, potências exteriores, dimensão de Krull para anéis, altura de ideais, módulos Noetherianos e módulos Artinianos. Também é preciso noções básicas de categorias, funtores e limites diretos.

Veremos a seguir como está disposta esta dissertação, descrevendo um breve resumo de cada capítulo.

No Capítulo 1, introduziremos os conceitos de anéis e módulos graduados, apresentando uma versão graduado do lema de Nakayama. Falaremos sobre filtrações, culminando no lema de Artin-Rees e no teorema da interseção de Krull. Definiremos polinômios binomiais e as funções de Hilbert e Hilbert-Samuel provando que estas são de tipo-polinomial. Definiremos dimensão e sistema de parâmetros de módulos, finalizando o capítulo com o teorema da dimensão de Krull.

No segundo capítulo, definiremos sequências regulares, expondo um caso em que estas são invariantes por permutações. Definiremos grades de ideais sobre módulos, e um importante invariante no caso local: a profundidade. Faremos a demonstração da fórmula de Auslander-Buchsbaum. Definiremos anéis e módulos Cohen-Macaulay e anéis regulares, exibindo algumas de suas propriedades.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo das sizíguas. Definiremos resoluções livres graduadas minimais e os números graduados de Betti. Veremos como a função de Hilbert pode ser calculada através dos números de Betti, indicando quando a função de Hilbert vem a ser polinomial. Estudaremos um pouco sobre a teoria de complexos simpliciais e como podemos aplicá-la para calcular resoluções de ideais monomiais. Apresentaremos um critério para decidir se o complexo obtido de um complexo simplicial rotulado por monômios é minimal. No final, faremos a demonstração do teorema das sizíguas de Hilbert.

O quarto capítulo é uma rápida abordagem sobre os funtores de cohomologia local. Introduzimos a definição dos funtores de I -torção, sendo estes exatos à esquerda e definiremos os funtores de cohomologias local como seus funtores derivados à direita. Logo após, caracterizaremos os funtores de cohomologia local por limites diretos de funtores de extensão. Definimos o complexo de Čech, relacionando suas cohomologias com as cohomologias locais. Para finalizar, veremos o teorema da dualidade local e os teoremas da nulidade e não-nulidade.

O Capítulo 5 é o principal e utiliza a teoria desenvolvida nos quatros primeiros capítulos. Primeiramente, definiremos a regularidade de Castelnuovo-Mumford através de deslocamentos das sizíguas. Agora, utilizando a regularidade, veremos a partir de quando a função de Hilbert concorda com o seu polinômio de Hilbert. Para caracterizar a regularidade através dos módulos de cohomologia local, vamos introduzir a noção de módulos d -regulares e fracamente d -regulares. Demonstraremos que quocientes de módulos por elementos quase-regulares preservam d -regularidade. A partir daí, podemos caracterizar a regularidade como sendo o menor número inteiro d em que o módulo é d -regular. Veremos que no caso de módulos Artinianos, a regularidade pode ser calculada olhando apenas para a estrutura graduado do módulo. No caso de módulos Cohen-Macaulay veremos que o cálculo da regularidade é feito reparando a estrutura do módulo quocientado por uma sequência regular maximal. E por fim, se o módulo é Cohen-Macaulay podemos calcular efetivamente o menor número inteiro que transforma a função de Hilbert em uma função polinomial, a partir da regularidade.

Por fim, no capítulo 6 faremos um pequeno apêndice em álgebra homológica sobre módulos projetivos, injetivos, resoluções projetivas, resoluções injetivas e funtores derivados.

Capítulo 1

Funções de Hilbert e de Hilbert-Samuel

Um fato bastante importante em álgebra comutativa é quando reconhecemos em um anel (ou em um módulo) uma estrutura graduada “razoável”. Para tais anéis (ou módulos), muitos aspectos teóricos ficam bem administrados. Por exemplo, dependendo de quão razoável seja a parte homogênea de grau zero podemos entender as demais partes homogêneas às custas de resultados de álgebra linear, através das chamadas funções de Hilbert e de Hilbert-Samuel. Essas funções acabam sendo invariantes do anel (ou módulo) que capturaram outros invariantes importantes (como exemplo, a dimensão e a multiplicidade). Nesse capítulo nosso objetivo é discutir os vários conceitos e propriedades que são subjacentes a essas funções.

1.1 Anéis e Módulos Graduados

Seja $(G, +)$ um *monóide comutativo*, isto é, um conjunto munido com uma operação associativa, comutativa, possuindo elemento neutro. Um anel R é dito *G -graduado* se seu grupo aditivo $(R, +)$ admite uma decomposição em soma direta de subgrupos abelianos R_g

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

satisfazendo $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$, para todos $g, h \in G$.

Os elementos de R_g são chamados de *elementos homogêneos de grau g* do anel graduado R . Em particular, todo elemento $a \in R$ pode ser escrito de forma única como uma soma finita $a = \sum_{g \in G} a_g$ de elementos homogêneos $a_g \in R_g$. Dizemos nesse caso que a_g é a *componente homogênea de grau g* de a .

Tipicamente, iremos considerar nesse trabalho anéis graduados em que $G = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^n$ ou \mathbb{Z}^n .

Observação 1.1.1. Qualquer anel R admite ao menos uma G -gradação. Para isso, basta considerarmos $R_0 = R$ e $R_g = 0$ para cada $g \neq 0$. Chamamos esta de *gradação trivial* de R . Certamente, esta é uma gradação grosseira que não produz nenhuma informação adicional.

Exemplo 1.1.2. Seja S um anel. O exemplo padrão de anel \mathbb{N} -graduado é o anel de polinômios $R = S[x_1, \dots, x_n]$. Sua \mathbb{N} -gradação usual é dada pela seguinte decomposição

$$R = \bigoplus_{d \geq 0} S[x_1, \dots, x_n]_d,$$

onde $S[x_1, \dots, x_n]_d$ é o S -módulo livre de posto $\binom{n+d-1}{d-1}$ com base formada por todos os monômios de grau d .

Exemplo 1.1.3. Também podemos oferecer uma \mathbb{N}^n -gradação para o anel de polinômios $R = S[x_1, \dots, x_n]$ (S anel qualquer). Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denote $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. A \mathbb{N}^n -gradação é dada por

$$R = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R_\alpha$$

onde R_α é o S -módulo livre gerado pelo monômio \mathbf{x}^α . Este tipo de graduação será utilizada no Capítulo 3, especialmente na Seção 3.2.

Exemplo 1.1.4. Seja $R = S[x]$ o anel de polinômios sobre um anel S . Podemos tornar R um anel \mathbb{Z}_2 -graduado da seguinte forma

$$R = S_p \oplus S_i$$

onde $S_p = S + Sx^2 + Sx^4 + \cdots$ é a componente de grau $\bar{0}$ e $S_i = Sx + Sx^3 + Sx^5 + \cdots$ é a componente de grau $\bar{1}$. Com a \mathbb{N} -gradação dada no Exemplo 1.1.2, o elemento $5 + x^4$ não é homogêneo, mas pela \mathbb{Z}_2 -gradação este é homogêneo, pois possui grau $\bar{0}$.

Fixado um monóide comutativo G , podemos notar os anéis G -graduados como os objetos de uma categoria onde os morfismos são definidos da seguinte maneira.

Definição 1.1.5. Um morfismo $\varphi : R \rightarrow S$ entre dois anéis G -graduados é dito ser *morfismo graduado* se preserva graduação, isto é, se $\varphi(R_g) \subseteq S_g$ para todo $g \in G$.

Seja R um anel G -graduado. Dizemos que um R -módulo M é G -graduado se $(M, +)$ admite uma decomposição em soma direta de subgrupos abelianos M_g

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g$$

compatível com a graduação de R , ou seja, $R_g \cdot M_h \subseteq M_{g+h}$ para todos $g, h \in G$.

Tal como no caso dos anéis graduados, os elementos em M_g são chamados de *homogêneos de grau g* e todo elemento em M pode ser escrito de forma única como soma de suas componentes homogêneas. Além disso, um morfismo de R -módulos será dito *graduado* se preserva graduação.

Notação: Denotaremos por $M_d(a)$ o deslocamento por a , isto é, $M_d(a) = M_{a+d}$.

Dado $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel \mathbb{N} -graduado, podemos notar R_0 como subanel de R . Sendo assim, podemos enxergar R como álgebra sobre R_0 . Além disso, cada componente M_n de um R -módulo graduado M pode ser considerada como R_0 -módulo.

Exemplo 1.1.6. Seja R um anel e $I \subseteq R$ um ideal. Então a soma direta

$$\mathcal{R}_R(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n = R \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots$$

é um anel graduado, onde a multiplicação é herdada de R . O anel $\mathcal{R}_R(I)$ é chamado *anel de Rees sobre I* . Se o consideramos como R -álgebra, chamamos $\mathcal{R}_R(I)$ de *álgebra de Rees sobre I* . Considere agora M um R -módulo. A soma direta

$$\mathcal{R}_M(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n M = M \oplus IM \oplus I^2 M \oplus \dots$$

define um $\mathcal{R}_R(I)$ -módulo graduado, no qual a multiplicação por escalar é herdada da ação de R em M .

Abaixo, segue algumas propriedades sobre anéis e módulos \mathbb{N} -graduados e em especial no caso em que a componente de grau zero é Artiniano.

Proposição 1.1.7. *Seja $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ um anel graduado. Então R é Noetheriano se, e só se, R_0 é Noetheriano e R é finitamente gerado como álgebra sobre R_0 .*

Demonstração. Se R é finitamente gerado como álgebra sobre R_0 então R é isomorfo a um quociente do anel de polinômios $R_0[x_1, \dots, x_n]$. Como R_0 é Noetheriano então pelo teorema da base de Hilbert, segue que R é Noetheriano. Reciprocamente, se R é Noetheriano, então R_0 é Noetheriano, pois $R_0 \cong R/I$, onde I é o ideal $\bigoplus_{d \geq 1} R_d$. Por hipótese, I é finitamente gerado, digamos pelos elementos homogêneos a_1, \dots, a_r com respectivos graus n_1, \dots, n_r . Seja, $R' = R_0[a_1, \dots, a_r]$. Mostraremos que $R = R'$. Para tal, é suficiente mostrar que $R_n \subseteq R'$, para todo $n \geq 0$. Pela definição de R' , temos que $R_0 \subseteq R'$. Por indução, assumamos que $R_d \subseteq R'$ para todo $d \leq n-1$, e $n > 0$. Se $a \in R_n \subseteq I$, então a pode ser escrito na forma $a = c_1 a_1 + \dots + c_r a_r$, onde cada c_i é um elemento homogêneo de grau $n - n_i < n$. Por hipótese de indução temos que $c_i \in R'$, e como $a_i \in R'$, segue que $a \in R'$. \square

Proposição 1.1.8. *Seja $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado. Assuma que R_0 é Artiniano e R é finitamente gerado como álgebra sobre R_0 . Se $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é um R -módulo graduado finitamente gerado, então cada M_n é finitamente gerado como R_0 -módulo.*

Demonstração. Por hipótese, R_0 é Artiniano e em particular Noetheriano. Como R é finitamente gerado como R_0 -álgebra, segue pela Proposição 1.1.7 que R é Noetheriano, donde M é R -módulo Noetheriano. Seja $N_n = M_n \oplus (\bigoplus_{m > n} M_m)$. Desse modo, N_n é finitamente gerado sobre R , digamos por x_1, x_2, \dots, x_t . Por definição de N_n , cada x_i pode ser escrito como $x_i = y_i + z_i$, com $y_i \in M_n$ e $z_i \in \bigoplus_{m > n} M_m$. Mostraremos que y_1, \dots, y_t geram M_n sobre R_0 . Com efeito, se $y \in M_n$, então y é da forma

$$y = \sum_{i=1}^t a_i x_i \quad (a_i \in R).$$

Pela graduação de R , podemos escrever $a_i = b_i + c_i$ com $a_i \in R_0$ e $c_i \in (\bigoplus_{j > 0} R_j)$. Dessa forma, teremos

$$y = \sum_{i=1}^t (b_i + c_i)(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^t b_i y_i$$

pois, os elementos $b_i z_i, c_i y_i$ e $c_i z_i$ estão em $\bigoplus_{m > n} M_m$. \square

Corolário 1.1.9. *Com as mesmas hipóteses da Proposição 1.1.8, o comprimento $\ell_{R_0}(M_n)$ do R_0 -módulo M_n é finito para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Como R_0 é Artiniano (Noetheriano), M_n é Artiniano (Noetheriano), e pela Proposição 1.1.8, M_n é R_0 -módulo finitamente gerado, segue que $\ell_{R_0}(M_0) < \infty$. \square

Definição 1.1.10. Considere R um anel G -graduado e M um R -módulo G -graduado. Um submódulo $N \subseteq M$ é dito G -graduado se N herda a graduação de M , isto quer dizer que, $(N, +)$ se decompõe como

$$N = \bigoplus_{g \in G} N \cap M_g$$

Em especial, um ideal $I \subseteq R$ é dito ser *ideal homogêneo* se I é submódulo graduado de R , visto como R -módulo.

Segue direto da Definição 1.1.10 que o quociente de M por N admite uma graduação de maneira natural dada por

$$\frac{M}{N} = \bigoplus_{g \in G} \frac{M_g}{N \cap M_g}.$$

Além disso, também temos a sequência exata de módulos G -graduados

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

A próxima proposição caracteriza ideais homogêneos em termos de elementos homogêneos.

Proposição 1.1.11. *Considere $(G, +)$ um grupo abeliano, $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ um anel G -graduado e $I \subseteq R$ um ideal. Então, são equivalentes:*

- (a) *I é ideal homogêneo.*
- (b) *Para todo $a = \sum_{g \in G} a_g$ em R , a pertence a I se, e somente se, $a_g \in I$ para todo $g \in G$.*
- (c) *I é gerado por elementos homogêneos.*

Demonstração. A equivalência entre (a) e (b), e a implicação de (b) para (a), seguem simplesmente das definições. Para a implicação de (c) para (a) suponha que I seja gerado pelos elementos homogêneos a_i . Daí, para cada $a \in I$ podemos escrever $a = b_1 a_{i_1} + \cdots + b_n a_{i_n}$ com $b_i \in R$. Escreva cada $b_i = \sum_{g \in G} b_{i,g}$, com $b_{i,g} \in R_g$. Assim, o termo de grau g em a é

$$a_g = b_{1,g-\deg(a_{i_1})} a_{i_1} + \cdots + b_{n,g-\deg(a_{i_n})} a_{i_n}$$

Donde, $a_g \in I$. \square

É interessante notar que as estruturas graduadas herdam propriedades de casos mais comuns, como no caso de anéis locais. Um ótimo exemplo é o teorema análogo ao lema de Nakayama, agora pedindo apenas localidade na componente de grau 0. Este é chamado de lema de Nakayama homogêneo.

Lema 1.1.12 (Nakayama Homogêneo). Sejam $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado, sendo (R_0, \mathfrak{m}_0, k) anel local e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \bigoplus_{n > 0} R_n$ o ideal homogêneo maximal de R . Se M é um R -módulo graduado finitamente gerado então

$$\mu_R(M) = \dim_k M/\mathfrak{m}M$$

onde $\mu_R(M)$ denota a quantidade mínima de geradores homogêneos de M .

Demonstração. Escolha $m_1, \dots, m_r \in M$ elementos homogêneos tais que suas imagens em $M/\mathfrak{m}M$ formam uma k -base. Basta mostrar que m_1, \dots, m_k geram M . Defina $N = (m_1, \dots, m_k)$. Dessa forma, $M = N + \mathfrak{m}M$ e assim $M/N = \mathfrak{m}(M/N)$. Se $M \neq N$, então M/N é um R -módulo não-nulo graduado e finitamente gerado. Sendo assim, tome s o menor inteiro tal que $(M/N)_s \neq 0$. Daí, $(M/N)_s = \mathfrak{m}_0(M/N)_s$, contrariando a versão local do lema de Nakayama. Logo, $M = N$, como queríamos. \square

1.2 Filtrações e Lema de Artin-Rees

Definição 1.2.1. Se R é um anel, uma *filtração* em R é uma família de subgrupos aditivos $\mathfrak{F} = \{R_n\}$ tal que

$$(a) \quad R = R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_n \supseteq \dots$$

$$(b) \quad R_n R_m \subseteq R_{n+m} \text{ para quaisquer } m, n \in \mathbb{N}.$$

Chamamos o par (R, \mathfrak{F}) de *anel filtrado*. De maneira análoga, dada uma família de subgrupos aditivos $\mathfrak{F} = \{M_n\}$, define-se *filtração* de um módulo M sobre um anel filtrado R , e dizemos que M é *módulo filtrado*.

Na sequência, apresentamos dois exemplos de filtrações bastante importantes em álgebra comutativa.

Exemplo 1.2.2. Seja I um ideal de um anel R e M um R -módulo. As famílias $\mathfrak{F} = \{I^n\}$, $\mathfrak{G} = \{I^n M\}$ são filtrações de R e M respectivamente, as chamadas *filtrações I -ádicas*.

Exemplo 1.2.3. Seja I um ideal de um anel R . Suponha S o complementar em R da união de todos os primos associados de R/I , em símbolos,

$$S = R \setminus \bigcup_{P \in \text{Ass } R/I} P.$$

A n -ésima *potência simbólica* de I , denotada por $I^{(n)}$, é a imagem inversa do ideal $S^{-1}I^n$ pelo mapa de localização $R \rightarrow S^{-1}R$. A família $\mathfrak{F} = \{I^{(n)}\}$ é uma filtração de R chamada de *filtração simbólica* de R .

Seja $\mathfrak{F} = \{R_n\}$ uma filtração de R . O *anel graduado associado* de R com respeito a \mathfrak{F} é definido como

$$\text{gr}_{\mathfrak{F}}(R) = \bigoplus_{n \geq 0} R_n / R_{n+1}$$

onde o produto entre elementos homogêneos de $\text{gr}_{\mathfrak{F}}(R)$ é definido da seguinte maneira: se $a \in R_m$ e $b \in R_n$ então

$$(a + R_{m+1})(b + R_{n+1}) = ab + R_{m+n+1}.$$

Se M é um módulo sobre R , definimos o *módulo graduado associado de M com respeito a filtração \mathfrak{F}* como

$$\text{gr}_{\mathfrak{F}}(M) = \bigoplus_{n \geq 0} R_n M / R_{n+1} M.$$

Se $a \in R_m$ e $x \in R_n M$ definimos a multiplicação por escalar por

$$(a + R_{m+1})(x + R_n M) = ax + R_{m+n+1} M.$$

De forma que, $\text{gr}_{\mathfrak{F}}(M)$ é um módulo graduado sobre o anel graduado $\text{gr}_{\mathfrak{F}}(R)$.

Notação: Sejam I um ideal de um anel R e M um R -módulo. Na situação particular em que \mathfrak{F} for a filtração I -ádica escreveremos $\text{gr}_I(R)$ e $\text{gr}_I(M)$ em vez de $\text{gr}_{\mathfrak{F}}(R)$ e $\text{gr}_{\mathfrak{F}}(M)$, respectivamente. Também chamaremos $\text{gr}_I(R)$ e $\text{gr}_I(M)$ simplesmente de anel graduado associado de I e módulo graduado associado de I , respectivamente.

Exemplo 1.2.4. Seja $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$ o anel das séries de potências formais sobre um corpo k . Considere \mathfrak{F} a filtração \mathfrak{m} -ádica, onde $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ é o único ideal maximal de R . Observe que $f \in \mathfrak{m}^d$ se, e somente se, todos os termos de f tem grau no máximo d . Assim, identificando os termos de grau no máximo $d + 1$ com 0, conseguimos um isomorfismo entre $\mathfrak{m}^d / \mathfrak{m}^{d+1}$, e os polinômios homogêneos de grau d . Logo, tomando a soma direta sobre todos os $d \geq 0$, temos o isomorfismo

$$\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) \cong k[x_1, \dots, x_n].$$

Observação 1.2.5. O exemplo acima é um caso particular do Teorema 2.1.14, para a sequência $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$, uma vez que

$$\frac{k[[x_1, \dots, x_n]]}{(x_1, \dots, x_n)} \cong k.$$

Definição 1.2.6. Seja M um R -módulo filtrado com filtração $\{M_n\}$ e I um ideal de R . Dizemos que $\{M_n\}$ é uma *I -filtração* se $IM_n \subseteq M_{n+1}$, para todo n . Uma I -filtração é dita ser *I -estável* se $IM_n = M_{n+1}$, para $n \gg 0$.

Note que a filtração I -ádica é I -estável.

Proposição 1.2.7. Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano R , $I \subseteq R$ um ideal e suponha que $\{M_n\}$ é uma I -filtração de M . São equivalentes:

- (a) $\{M_n\}$ é I -estável;
- (b) Defina o anel graduado $R^* = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$, e o R^* -módulo graduado $M^* = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$. Então, M^* é finitamente gerado.

Demonstração. Sejam $N_n = \bigoplus_{i=0}^n M_i$ e

$$M_n^* = M_0 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus IM_n \oplus I^2M_n \oplus \cdots$$

Como N_n é finitamente gerado sobre R , então M_n^* é finitamente gerado sobre R^* . Por hipótese $\{M_n\}$ é I -filtração, logo $M_n^* \subseteq M_{n+1}^*$ para todo $n \geq 0$, e ainda pela definição de M^* temos a igualdade

$$M^* = \bigcup_{n \geq 0} M_n^*.$$

Dessa forma, M^* é finitamente gerado sobre R^* se, e só se, $M^* = M_m^*$, para algum m . Noutras palavras, $M_{m+k} = I^k M_m$, para todo $k \geq 1$, o que é equivalente a dizer que a filtração $\{M_n\}$ é I -estável. \square

Se $\{M_n\}$ é uma filtração do R -módulo filtrado M e N é um submódulo de M , então as filtrações induzidas em N e M/N são dadas por $N_n = N \cap M_n$ e $(M/N)_n = (M_n + N)/N$, respectivamente.

Lema 1.2.8 (Artin-Rees). *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano R e N um submódulo de M . Suponha que M possui uma filtração I -estável $\{M_n\}$, onde I é um ideal de R . Então, a filtração induzida em N também é I -estável.*

Demonstração. Sejam $R^* = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$, $M^* = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ e $N^* = \bigoplus_{n \geq 0} N_n$ como na Proposição 1.2.7. Como R é Noetheriano, então I é finitamente gerado, portanto R^* é finitamente gerado como R -álgebra, pois seus elementos podem ser expressos de forma polinomial no conjunto finito dos geradores de I . Segue da Proposição 1.1.7 que R^* é Noetheriano. Por hipótese, M é finitamente gerado sobre R e a filtração $\{M_n\}$ é I -estável, então pela Proposição 1.2.7, M^* é finitamente gerado sobre R^* . Logo, N^* é finitamente gerado sobre R^* , novamente pela Proposição 1.2.7, temos que $\{N_n\}$ é I -estável. \square

No caso de anéis locais temos o importante

Teorema 1.2.9 (Interseção de Krull). *Seja R um anel Noetheriano e $I \subsetneq R$ um ideal próprio. Se R é local ou um domínio, então*

$$\bigcap_{n \geq 0} I^n = (0).$$

Demonstração. Denote $J = \bigcap_{n \geq 0} I^n$. Uma vez que a filtração I -ádica é I -estável, segue pelo Lema 1.2.8 que a filtração $\{J \cap I^n\}$ é I -estável. Daí, existe $c \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$J = J \cap I^{c+n} \subseteq JI^n$$

implicando na igualdade $J = JI^n$. Assim, se R é local, $J = (0)$ pelo lema de Nakayama. Agora, se R é domínio, localize R por um ideal maximal $\mathfrak{m} \supseteq I$, e pelo caso local que acabamos de mostrar $J_{\mathfrak{m}} = (0)$. Mas o fato de R ser domínio implica na injetividade do mapa de localização $R \rightarrow R_{\mathfrak{m}}$. Logo, $J \subseteq J_{\mathfrak{m}}$ e $J = (0)$. \square

1.3 Função e Polinômio de Hilbert

Definição 1.3.1. Definimos o *operador diferença* (ou *derivada discreta*) de uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ por

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Se $d \geq 0$ denotaremos as d iterações do operador diferença por $\Delta^d f$, convencionando $\Delta^0 f = f$.

Definição 1.3.2. Um *polinômio binomial* é um polinômio em $\mathbb{Q}[x]$ da forma, ($d \in \mathbb{Z}$)

$$\binom{x}{d} = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2) \cdots (x-d+1)}{d!}, & \text{se } d \geq 0; \\ 0, & \text{se } d < 0; \end{cases}$$

Observe que $\binom{x}{d}$ é um polinômio de grau d para cada $d \in \mathbb{N}$.

Observação 1.3.3. Como é bem conhecido, $\binom{n+1}{d} = \binom{n}{d} + \binom{n}{d-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, o polinômio $p(x) = \binom{x+1}{d} - \binom{x}{d} - \binom{x}{d-1}$ possui infinitas raízes em \mathbb{Q} . Logo, $p(x)$ deve ser o polinômio nulo, ou seja,

$$\Delta \binom{x}{d} = \binom{x}{d-1}.$$

Definição 1.3.4. Uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ é dita de *tipo-polinomial* se assintoticamente concorda com um polinômio $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, isto é, $f(n) = g(n)$ para todo inteiro $n \gg 0$. O grau de f será tomado como o grau de g .

Note que o grau de f está bem definido. Com efeito, se tivéssemos dois polinômios concordando com f para valores suficientemente grandes, então a diferença entre eles seria um polinômio com infinitas raízes, logo seria o polinômio nulo. Convencionaremos que o grau do polinômio nulo é igual a -1 .

Proposição 1.3.5. As seguintes propriedades são verificadas:

- (a) Seja $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinômio de grau d . Então $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo inteiro $n \gg 0$ se, e só se, $p(x)$ é uma combinação \mathbb{Z} -linear de polinômios binomiais.
- (b) Considere uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Então f é de tipo-polinomial de grau d se, e só se, Δf é de tipo-polinomial de grau $d-1$.

Demonstração. (a) De fato, qualquer combinação \mathbb{Z} -linear de polinômios binomiais assume valores inteiros. Suponha então, que $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo inteiro $n \gg 0$. Argumentaremos por indução sobre d que $p(x)$ é uma combinação \mathbb{Z} -linear de polinômios binomiais. Se $d = 0$, o resultado é claro. Suponha $d > 0$. Os polinômios binomiais $\binom{x}{i}$ formam uma \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}[x]$, e assim podemos escrever

$$p(x) = a_d \binom{x}{d} + a_{d-1} \binom{x}{d-1} + \cdots + a_1 \binom{x}{1} + a_0 \binom{x}{0} \quad (a_i \in \mathbb{Q}).$$

Devemos mostrar que $a_i \in \mathbb{Z}$. Para tal, considere a derivada discreta

$$\Delta p(x) = a_d \binom{x}{d-1} + a_{d-1} \binom{x}{d-2} + \cdots + a_1 \binom{x}{0}.$$

Por hipótese, $\Delta p(n) = p(n+1) - p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \gg 0$. Então, pela hipótese de indução $a_d, \dots, a_1 \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$a_0 = p(x) - a_d \binom{x}{d} - a_{d-1} \binom{x}{d-1} - \cdots - a_1 \binom{x}{1}.$$

é um polinômio constante que assume valores inteiros. Portanto, $a_0 \in \mathbb{Z}$.

(b) Se f é de tipo-polinomial de grau d , pelo item anterior podemos escrever seu polinômio correspondente da forma

$$p(x) = a_d \binom{x}{d} + a_{d-1} \binom{x}{d-1} + \cdots + a_1 \binom{x}{1} + a_0 \binom{x}{0} \quad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Pela Observação 1.3.3,

$$\Delta p(x) = a_d \binom{x}{d-1} + a_{d-1} \binom{x}{d-2} + \cdots + a_1 \binom{x}{0}.$$

Portanto, Δf é de tipo-polinomial de grau $d-1$. Para a recíproca, suponha que $q(x)$ é o polinômio correspondente a Δf . Utilizando o item anterior novamente podemos escrever

$$q(x) = a_d \binom{x}{d-1} + a_{d-1} \binom{x}{d-2} + \cdots + a_1 \binom{x}{0} \quad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Consideremos a “integral discreta” de $q(x)$:

$$r(x) = a_d \binom{x}{d} + a_{d-1} \binom{x}{d-1} + \cdots + a_1 \binom{x}{1}.$$

Pela Observação 1.3.3, $\Delta r(x) = q(x)$. Logo, $\Delta(f-r)(n) = 0$ para todo $n \gg 0$, ou seja, uma constante $a_0 = f(n) - r(n)$. Assim, se consideramos $p(x) = r(x) + a_0$, temos um polinômio de grau d e ainda para todo $n \gg 0$, $p(n) = r(n) + f(n) - r(n) = f(n)$. \square

Utilizando o princípio de indução e a parte (b) da proposição anterior temos o seguinte

Corolário 1.3.6. *Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função numérica e $d \geq 0$ um inteiro. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\Delta^d f(n) = c$, $c \neq 0$ e $n \gg 0$.

(b) f é de tipo-polinomial de grau d .

Demonstração. A implicação de (b) para (a) é clara, uma vez que se escrevemos o polinômio correspondente a f em termos de polinômios binomiais, a cada iteração do operador diferença o grau deste decai em 1. Por indução em d provaremos a outra implicação. Se $d = 0$, então o corolário é trivialmente satisfeito. Suponha agora $d > 0$. Como $\Delta^d f(n) = \Delta^{d-1}(\Delta f(n)) = c$, $c \neq 0$ e $n \gg 0$, por hipótese de indução $\Delta f(n)$ é de tipo-polinomial de grau $d-1$ e dessa forma pela Proposição 1.3.5, f é de tipo-polinomial de grau d . \square

Definição 1.3.7. Seja $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ um anel graduado e $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ um R -módulo graduado cujas componentes possuem comprimento finito para todo n . A *função de Hilbert* é definida por

$$h_R(M, n) = \ell_{R_0}(M_n)$$

Exemplo 1.3.8. Seja k um corpo e $R = k[x_1, \dots, x_r]$. Então uma k -base de R_n é formada pelos monômios de grau n em x_1, \dots, x_r . Daí,

$$h(R, n) = \ell_k(R_n) = \dim_k R_n = \binom{n+r-1}{r-1}$$

é uma função polinomial de grau $r-1$.

Exemplo 1.3.9. Considere (R, \mathfrak{m}, k) um anel local Noetheriano e a k -álgebra graduada

$$B = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} = k \oplus \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \oplus \frac{\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^3} \oplus \dots$$

Se \mathfrak{m} é gerado por w_1, \dots, w_r , temos um morfismo sobrejetor graduado de k -álgebras

$$k[x_1, \dots, x_r] \rightarrow B, \quad x_i \mapsto w_i + \mathfrak{m}^2.$$

Para a sobrejetividade, considere um elemento homogêneo qualquer $a + \mathfrak{m}^{n+1} \in \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}$. Em particular, $a \in \mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m} = (w_1, \dots, w_r)$. Assim, a é da forma

$$a = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n} \beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} w_1^{\alpha_1} \dots w_r^{\alpha_r}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} a + \mathfrak{m}^{n+1} &= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n} \beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} w_1^{\alpha_1} \dots w_r^{\alpha_r} + \mathfrak{m}^{n+1} \\ &= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n} (\beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} + \mathfrak{m})(w_1 + \mathfrak{m}^2)^{\alpha_1} \dots (w_r + \mathfrak{m}^2)^{\alpha_r}. \end{aligned}$$

Logo, todo elemento homogêneo é escrito em termos de $w_1 + \mathfrak{m}^2, \dots, w_r + \mathfrak{m}^2$, como os elementos homogêneos geram a k -álgebra B , então seus elementos são combinações de $w_1 + \mathfrak{m}^2, \dots, w_r + \mathfrak{m}^2$. Onde, o morfismo é sobrejetor. Uma vez que este morfismo é graduado, então seu núcleo é um ideal homogêneo, e pelo primeiro teorema dos isomorfismos, temos que B é um quociente de $k[x_1, \dots, x_r]$ por um ideal homogêneo. Assim, pelo Exemplo 1.3.8

$$h(B, n) = \dim_k B_n \leq \binom{n+r-1}{r-1}.$$

Mostraremos que sob certas condições que a função de Hilbert é de tipo-polinomial. Para isto, precisamos de mais alguns preparativos.

Proposição 1.3.10 (Aditividade do Comprimento). *Suponha que temos uma sequência exata de R -módulos*

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

com todos os comprimentos finitos. Então, temos a aditividade do comprimento, isto é,

$$\ell(A_1) - \ell(A_2) + \cdots + (-1)^{n-1} \ell(A_n) = 0$$

Demonstração. Isso é feito decompondo a sequência em sequências exatas curtas da forma

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

e aplicando o fato de que $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$. □

O próximo teorema nos diz condições suficientes para que a função de Hilbert seja de tipo-polinomial.

Teorema 1.3.11 (Hilbert). *Seja $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado. Assuma que R_0 é Artiniano e R é finitamente gerado como álgebra sobre R_0 , com todos os geradores a_1, \dots, a_r pertencentes a R_1 . Se M é R -módulo graduado finitamente gerado, então sua função de Hilbert é do tipo-polinomial de grau no máximo $r - 1$.*

Demonstração. Utilizaremos indução sobre r . Se $r = 0$, então $R = R_0$. Escolha um conjunto finito de geradores homogêneos de M sobre R . Se d é o máximo dos graus desses geradores, então $M_n = 0$ para todo $n > d$, implicando que $h(M, n) = 0$. Assim, a função de Hilbert concorda com o polinômio nulo para valores suficientemente grandes. Suponha então $r > 0$. Sejam $a_r \in R_1$ e $\lambda_r : M_n \rightarrow M_{n+1}$ a multiplicação por a_r . Denote por K_n o kernel de λ_r e por C_n o cokernel de λ_r . Então, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda_r} M_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$$

Seja $K = \bigoplus_{n \geq 0} K_n$ e $C = \bigoplus_{n \geq 0} C_n$. Assim, K é submódulo de M e C é um quociente de M , logo são finitamente gerados. Então pelo Corolário 1.1.9, $h(K, n) < \infty$ e $h(C, n) < \infty$. Pela Proposição 1.3.10, temos

$$h(K, n) - h(M, n) + h(M, n+1) - h(C, n) = 0.$$

Daí, $\Delta h(M, n) = h(C, n) - h(K, n)$. Por outro lado, observe que a_r anula K e C , logo K e C são finitamente gerados como T -módulos, onde T é o subanel gerado por a_1, \dots, a_{r-1} . Por hipótese de indução, $h(K, n)$ e $h(C, n)$ são de tipo-polinomial de graus no máximo $r - 2$, implicando que $\Delta h(M, n)$ também é. Onde pela Proposição 1.3.5, $h(M, n)$ é de tipo-polinomial de grau no máximo $r - 1$. □

Um anel como no Teorema 1.3.11, adicionado com a localidade na componente de grau zero é chamado de *anel homogêneo*. Veremos abaixo que a desigualdade obtida no Teorema de Hilbert passa a ser igualdade no caso de anéis homogêneos.

Teorema 1.3.12. *Seja R um anel homogêneo e M um R -módulo graduado finitamente gerado de dimensão d . Então a função de Hilbert $h(M, n)$ é de tipo-polinomial de grau $d - 1$.*

Demonstração. Se $M = 0$, o polinômio nulo (de grau -1), satisfaz o teorema. Então, assumamos $M \neq 0$. Dessa forma, escolha $P_1 \in \text{Ass } M$. Então, P_1 é ideal homogêneo e existe submódulo graduado $N_1 \subseteq M$ tal que $N_1 \cong (R/P_1)(a_1)$. Se $N_1 \neq M$, escolhamos $P_2 \in \text{Ass}(M/N_1)$. Como antes, existe submódulo graduado $N_2 \subseteq M$, com $N_2/N_1 \cong (R/P_2)(a_2)$. Continuando dessa maneira, como M é Noetheriano conseguimos uma cadeia finita

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_m = M$$

de submódulos graduados de M tais que $N_{i+1}/N_i \cong (R/P_i)(a_i)$, para cada $i = 1, \dots, m$. Assim, por definição $h(M, n) = \sum_{i=1}^m h((R/P_i)(a_i), n)$. Observe que $d = \sup\{\dim(R/P_i)\}$. Como os valores da função de Hilbert só assume valores não-negativos para $n \gg 0$, então o polinômio que a descreve é o nulo ou possui coeficiente líder não-negativo, e como consequência o grau da soma desses polinômios é o máximo dos graus. Assim, basta provar o teorema para o caso $M = R/P$, para P um ideal primo homogêneo. Argumentaremos por indução em $\dim R/P = d$. Se $\dim R/P = 0$, então R/P é corpo e P é o único ideal homogêneo maximal $\mathfrak{m}_0 \oplus_{n>0} R_n$ de R , onde \mathfrak{m}_0 é o ideal maximal de R_0 . Logo, para todo $n > 0$, $h(R/P, n) = \ell(R_n/P_n) = 0$. Se $\dim R/P > 0$, como R é homogêneo, podemos escolher um elemento homogêneo $x \neq 0$ em R/P de grau 1. Donde a sequência

$$0 \longrightarrow (R/P)(-1) \xrightarrow{x} R/P \longrightarrow R/(x, P) \longrightarrow 0$$

é exata. Pela Proposição 1.3.10, temos

$$\Delta h(R/P, n) = h(R/P, n+1) - h(R/P, n) = h(R/(x, P), n+1).$$

Uma vez que R/P é domínio, a Proposição 1.4.11 juntamente com o Teorema 1.5.7 nos garante que $\dim R/(x, P) = d-1$. A hipótese de indução nos diz que $\Delta h(R/P, n)$ é de tipo-polinomial de grau $d-2$. Se $d > 1$, o Corolário 1.3.6 implica que $\Delta^{d-1}(h(R/P, n)) = \Delta^{d-2}(\Delta h(R/P, n))$ é uma constante não-nula para valores suficientemente grandes de n . Se $d = 1$, então $\Delta^{d-1}(h(R/P, n)) = h(R/P, n) = h(R/P, 0) + \sum_{i=1}^n h(R/(x, P), i)$ é constante para $n \gg 0$, pois $h(R/(x, P), i) = 0$, para $i \gg 0$ e essa constante é não-nula pois $h(R/P, 0) \neq 0$. Em qualquer caso, o Corolário 1.3.6 conclui o desejado. \square

1.4 Polinômio de Hilbert-Samuel

Definição 1.4.1. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel Noetheriano local. Um ideal I de R , é dito ser *ideal de definição* se existe algum $n \geq 1$, tal que $\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$.

Observe em particular que \mathfrak{m} é ideal de definição.

Proposição 1.4.2. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel Noetheriano local. Então I é ideal de definição se, e só se, R/I é Artiniano.

Demonstração. Afirmamos que I é ideal de definição se, e somente se, $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Com efeito, se I ideal de definição, então $\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$, para algum $n \geq 1$. Daí, $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}^n} \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$. Reciprocamente, uma vez que R é Noetheriano, então \mathfrak{m} é finitamente gerado, digamos $\mathfrak{m} = \sqrt{I} = (a_1, \dots, a_r)$. Assim, existem $n_1, \dots, n_i \geq 1$ tais que $a_i^{n_i} \in I$. Defina $n = n_1 + \cdots + n_r$.

Mostraremos que $\mathfrak{m}^n \subseteq I$. Observe que \mathfrak{m}^n é gerado pelos elementos da forma $a_1^{i_1} \cdots a_r^{i_r}$, com $i_1 + \cdots + i_r = n$. Então, existe $i_j \geq n_j$, para algum $j = 1, \dots, r$, pois caso contrário $i_1 + \cdots + i_r < n_1 + \cdots + n_r = n$. Logo, os geradores de \mathfrak{m}^n estão em I . Assim, $\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$, pois \mathfrak{m} é o único maximal de R . Da equivalência verificada acima, temos assim que, I é ideal de definição se, e somente se, $\mathfrak{m} = \sqrt{I} = \bigcap_{P \supseteq I} P$, em outras palavras, todo primo contendo I é maximal, equivalentemente, R/I é Artiniano pelo teorema da correspondência. \square

Seja I um ideal de definição de um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Se M é um R -módulo finitamente gerado, então M/IM é um R/I -módulo finitamente gerado. Pela Proposição 1.4.2, R/I é Artiniano, sendo que M/IM também é Artiniano, ou seja, possui comprimento finito. Com as filtrações I -ádicas o anel graduado associado e o módulo graduado associado são dados por

$$\mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1} \quad \text{e} \quad \mathrm{gr}_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M.$$

Como R é Noetheriano, digamos que I seja gerado por a_1, \dots, a_r . Analogamente ao Exemplo 1.3.9, as imagens $a_1 + I^2, \dots, a_r + I^2$ em I/I^2 geram $\mathrm{gr}_I(R)$ sobre R/I . Pelo Teorema 1.3.11,

$$h(\mathrm{gr}_I(M), n) = \ell_{R/I} \left(\frac{I^n M}{I^{n+1} M} \right) < \infty.$$

Como I anula $I^n M / I^{n+1} M$, então

$$\ell_R \left(\frac{I^n M}{I^{n+1} M} \right) = \ell_{R/I} \left(\frac{I^n M}{I^{n+1} M} \right) < \infty.$$

Estamos querendo garantir que nessas condições $\ell_R \left(\frac{M}{I^n M} \right) < \infty$. Para isso faremos indução sobre n . Se $n = 0$, o resultado é claro. Suponha então $n > 0$. Pelo terceiro teorema dos isomorfismos, a sequência abaixo é exata

$$0 \longrightarrow \frac{I^n M}{I^{n+1} M} \longrightarrow \frac{M}{I^{n+1} M} \longrightarrow \frac{M}{I^n M} \longrightarrow 0$$

Pelo comentário acima $\ell_R \left(\frac{I^n M}{I^{n+1} M} \right) < \infty$, e por hipótese de indução $\ell_R \left(\frac{M}{I^n M} \right) < \infty$. Donde, por 1.3.10,

$$\ell_R \left(\frac{M}{I^{n+1} M} \right) = \ell_R \left(\frac{I^n M}{I^{n+1} M} \right) + \ell_R \left(\frac{M}{I^n M} \right) < \infty. \quad (1.1)$$

Estamos prontos para definir a função de Hilbert-Samuel.

Definição 1.4.3. Se I é um ideal de definição de um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Se M é um R -módulo finitamente gerado, então a *função de Hilbert-Samuel* é dada por

$$s_I(M, n) = \ell_R \left(\frac{M}{I^n M} \right).$$

Observação 1.4.4. Pela equação (1.1), temos

$$\Delta s_I(M, n) = \ell_R \left(\frac{I^n M}{I^{n+1} M} \right) = h(\mathrm{gr}_I(M), n).$$

Então, pelo Teorema 1.3.11, $\Delta s_I(M, n)$ é de tipo-polinomial de grau no máximo $r - 1$, e pela Proposição 1.3.5 segue que $s_I(M, n)$ é de tipo-polinomial grau no máximo r .

Observação 1.4.5. Dada uma função numérica $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ temos que

$$\sum_a^{b-1} \Delta f(n) = f(b) - f(a).$$

Exemplo 1.4.6. Seja k um corpo, $S = k[x_1, \dots, x_d]$, $\mathfrak{n} = (x_1, \dots, x_d)$, $R = S_{\mathfrak{n}}$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{n}}$. O polinômio de Hilbert-Samuel de R com relação ao maximal \mathfrak{m} é o polinômio binomial

$$s_{\mathfrak{m}}(R, n) = \binom{n+d-1}{d}.$$

De fato, pela observação anterior

$$\Delta s_{\mathfrak{m}}(R, n) = \dim_k \frac{(x_1, \dots, x_d)^n}{(x_1, \dots, x_d)^{n+1}} = \binom{n+d-1}{d-1},$$

pois os elementos $x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, nos quais $i_1 + \cdots + i_d = n$, geram $(x_1, \dots, x_d)^n$ como R -módulo, então pelo lema de Nakayama, suas imagens $\bar{x}_1^{i_1} \cdots \bar{x}_d^{i_d}$, formam uma k -base para $\frac{(x_1, \dots, x_d)^n}{(x_1, \dots, x_d)^{n+1}}$, e temos exatamente $\binom{n+d-1}{d-1}$ desses elementos. Daí,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_{\mathfrak{m}}(R, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+d-1}{d-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \binom{i+d-1}{d}.$$

Pela Observação 1.4.5, temos da equação acima

$$s_{\mathfrak{m}}(R, n) - s_{\mathfrak{m}}(R, 0) = \binom{n+d-1}{d} + \binom{d-1}{d}.$$

O resultado segue pois $s_{\mathfrak{m}}(R, 0) = \binom{d-1}{d} = 0$.

Exemplo 1.4.7. Sejam $S = k[x, y]$, $I = (y^2 - x^3)$ e $\mathfrak{n} = (x, y)$, onde k é um corpo. Definimos $R = S_{\mathfrak{n}}/I_{\mathfrak{n}}$. Afirmamos que o polinômio de Hilbert-Samuel de R em seu ideal maximal $\mathfrak{m} = (\bar{x}, \bar{y})$ tem grau 1 e é dado por

$$s_{\mathfrak{m}}(R, n) = 2n - 1.$$

Pela Observação 1.4.4, temos $\Delta s_{\mathfrak{m}}(R, n) = \dim_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$. Temos os isomorfismos de k -espaços vetoriais

$$\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} = \frac{(\mathfrak{n}/I)^n}{(\mathfrak{n}/I)^{n+1}} = \frac{(\mathfrak{n}^n + I)/I}{(\mathfrak{n}^{n+1} + I)/I} \cong \frac{\mathfrak{n}^n + I}{\mathfrak{n}^{n+1} + I}.$$

Notemos que o ideal $\frac{\mathfrak{n}^n + I}{\mathfrak{n}^{n+1} + I}$ é gerado pelos monômios $\bar{x}^i \bar{y}^j$ tais que $i + j = n$. Se $n = 0$, então

$$\dim_k \frac{\mathfrak{n}^0}{\mathfrak{n} + I} = \dim_k S/\mathfrak{n} = \dim_k k = 1.$$

Se $n \geq 1$ e $j \geq 2$, como $x^{i+3}y^{j-2} \in \mathfrak{n}^{n+1}$, é verdade que

$$x^i y^j = x^i y^2 y^{j-2} \equiv x^i x^3 y^{j-2} = x^{i+3} y^{j-2} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}^{n+1} + I}.$$

Dessa forma, \bar{x}^n e $\bar{x}^{n+1}\bar{y}$ são suficientes para gerar $\frac{\mathfrak{n}^n + I}{\mathfrak{n}^{n+1} + I}$. Mostraremos que estes são linearmente independentes sobre k . Com efeito, se $a, b \in k$, então

$$a\bar{x}^n + b\bar{x}^{n+1}\bar{y} = \bar{0} \iff ax^n + bx^{n-1}y + (y^2 - x^3)f(x, y) \in \mathfrak{n}^{n+1},$$

para algum $f(x, y) \in k[x, y]$. Fazendo a substituição $x \mapsto t^2$ e $y \mapsto t^3$, teríamos $at^{2n} + bt^{2n+1} \in (t^{2n+2})$ em $k[t]$ implicando que $a = b = 0$. Logo,

$$\Delta_{s_m}(R, n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1; \\ 2, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Finalmente,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{s_m}(R, i) = \sum_{i=1}^{n-1} 2.$$

Pela Observação 1.4.5, $s_m(R, n) - s_m(R, 1) = 2(n - 1)$. Como $s_m(R, 1) = 1$, conseguimos

$$s_m(R, n) = 2n - 2 + 1 = 2n - 1.$$

Observação 1.4.8. O polinômio de Hilbert-Samuel depende da escolha do ideal de definição I , mas o grau $\lambda(M)$ de $s_I(M, n)$ é invariante para qualquer escolha possível. Para tal, seja t um inteiro positivo tal que $\mathfrak{m}^{tn} \subseteq I^n \subseteq \mathfrak{m}^t$. Daí, $s_m(M, tn) \geq s_I(M, n) \geq s_m(M, n)$. Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são os polinômios de $s_m(M, n)$ e $s_I(M, n)$, respectivamente temos,

$$p_1(tn) \geq p_2(n) \geq p_1(n).$$

Dividindo por $p_2(n)$ temos a desigualdade $\frac{p_1(tn)}{p_2(n)} \leq 1$, e assim $\deg p_1 \geq \deg p_2$. Da mesma forma, dividindo por $p_1(n)$ conseguimos $\deg p_2 \geq \deg p_1$. Donde, temos a igualdade desejada.

O próximo teorema nos revela uma espécie de aditividade do comprimento para a função de Hilbert-Samuel.

Teorema 1.4.9. *Seja I um ideal de definição do anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) e considere uma sequência exata de R -módulos finitamente gerados*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Então

$$s_I(M', n) + s_I(M'', n) = s_I(M, n) + r(n),$$

onde $r(n)$ é de tipo-polinomial de grau menor que $\lambda(M)$, e o coeficiente líder de $r(n)$ é não-negativo.

Demonstração. Temos os seguintes isomorfismos

$$\frac{M/I^n M}{M'/(M' \cap I^n M)} \cong \frac{M/I^n M}{(M' + I^n M)/I^n} \cong \frac{M}{M' + I^n M} \cong \frac{M/M'}{(M' + I^n M)/M'} \cong \frac{M/M'}{I^n(M/M')} \cong \frac{M''}{I^n M''}.$$

Este último, segue da hipótese que a sequência é exata, implicando que $M/M' \cong M''$. Do isomorfismo dos extremos, segue que a sequência

$$0 \longrightarrow M'/(M' \cap I^n M) \longrightarrow M/I^n M \longrightarrow M''/I^n M'' \longrightarrow 0$$

é exata. Denote $M'_n = M' \cap I^n M$. Pela Proposição 1.3.10,

$$s_I(M, n) - s_I(M'', n) = \ell_R(M'/M'_n).$$

Logo, $\ell_R(M'/M'_n)$ é de tipo-polinomial. Como a filtração I -ádica é I -estável, pelo Lema 1.2.8, a filtração $\{M'_n\}$ é I -estável, isto é, existe m tal que $IM'_n = M'_{n+1}$ para $n \geq m$. Assim, para $n \geq 0$, temos $I^{n+m}M' \subseteq M' \cap I^{n+m}M = M'_{n+m}$, o que implica que $I^{n+m}M' \subseteq M'_{n+m} = I^n M'_m \subseteq I^n M'$. Consequentemente,

$$\ell_R(M'/I^{n+m}M') \geq \ell_R(M'/M'_{n+m}) \geq \ell_R(M'/I^n M').$$

Reescrevemos como,

$$s_I(M', n+m) \geq \ell_R(M'/M'_{n+m}) \geq s_I(M', n).$$

Por argumentos análogos aos da Observação 1.4.8, temos que $s_I(M', n)$ e $\ell_R(M'/M'_n)$ possuem o mesmo grau e mesmo coeficiente líder. Fazendo $r(n) = s_I(M', n) - \ell_R(M'/M'_n)$, obtemos uma função de tipo-polinomial de grau menor que $\deg \ell_R(M'/M'_n) \leq \deg s_I(M, n) = d(M)$, com coeficiente líder não-negativo. Finalmente,

$$\begin{aligned} s_I(M, n) + r(n) &= \ell_R(M'/M'_n) + s_I(M'', n) + s_I(M', n) - \ell_R(M'/M'_n) \\ &= s_I(M', n) + s_I(M'', n). \end{aligned}$$

□

Corolário 1.4.10. *Seja N um submódulo de M , onde M é um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Então, $\lambda(N) \leq \lambda(M)$.*

Demonstração. Tome I um ideal de definição de R . Considere a sequência tautológica

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

Pelo Teorema 1.4.9, existe um função de tipo-polinomial $r(n)$, tal que $\deg r(n) < \lambda(M)$ e ainda

$$s_I(N, n) \leq s_I(N, n) + s_I(M/N, n) = s_I(M, n) + r(n).$$

Donde, $\lambda(N) \leq \lambda(M)$. □

Para um caso particular, podemos obter uma importante relação entre os graus dos polinômios de Hilbert-Samuel.

Proposição 1.4.11. *Sejam (R, \mathfrak{m}, k) um anel local Noetheriano, $r \in \mathfrak{m}$ e $S = R/(r)$. Então:*

- (a) $\lambda(S) \geq \lambda(R) - 1$;
- (b) $\lambda(S) = \lambda(R) - 1$, se $r \in R$ não é divisor de zero em R .

Demonstração. Sendo $\bar{\mathfrak{m}}$ a imagem de \mathfrak{m} , temos que $(S, \bar{\mathfrak{m}})$ é local Noetheriano com mesmo corpo residual de R . Para cada $n > 0$, a sequência

$$0 \longrightarrow \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \longrightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}^n} \longrightarrow \frac{S}{\bar{\mathfrak{m}}^n} \longrightarrow 0$$

é exata, pois temos os isomorfismos

$$\frac{S}{\bar{\mathfrak{m}}^n} = \frac{R/(r)}{(\mathfrak{m}^n + (r))/(r)} \cong \frac{R}{\mathfrak{m}^n + (r)} \quad \text{e} \quad \frac{\mathfrak{m}^n + (r)}{\mathfrak{m}^n} \cong \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}.$$

Por 1.3.10, obtemos

$$s(R, n) = s(S, n) + \ell_R \left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \right).$$

Afirmção 1: Para todo $n \geq 1$,

$$\ell_R \left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \right) \leq s(R, n-1).$$

De fato, o produto por r define um morfismo sobrejetor

$$f_r : \frac{R}{\mathfrak{m}^{n-1}} \longrightarrow \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)}$$

Assim,

$$\ell_R \left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \right) + \ell_R(\ker f_r) = \ell_R \left(\frac{R}{\mathfrak{m}^{n-1}} \right) = s(R, n-1).$$

Afirmção 2: Se r não é divisor de zero, existe $c > 0$, tal que para $n \gg 0$,

$$\ell_R \left(\frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \right) \geq s(R, n-c).$$

Pelo Lema 1.2.8, para $n \gg 0$, existe $c > 0$, tal que $\mathfrak{m}^n(r) \subseteq (r)\mathfrak{m}^{n-c}$. Isto induz um morfismo sobrejetor

$$h : \frac{(r)}{\mathfrak{m}^n \cap (r)} \longrightarrow \frac{(r)}{(r)\mathfrak{m}^{n-c}}$$

Novamente considere o morfismo sobrejetor produto por r ,

$$g_r : R \longrightarrow \frac{(r)}{(r)\mathfrak{m}^{n-c}}.$$

Sendo r não divisor de zero, $\ker g_r = \mathfrak{m}^{n-c}$, e pelo primeiro teorema dos isomorfismos

$$\frac{R}{\mathfrak{m}^{n-c}} \cong \frac{(r)}{(r)\mathfrak{m}^{n-c}}.$$

Dessa forma, o morfismo

$$g_r \circ h : \frac{(r)}{\mathfrak{m} \cap (r)} \longrightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}^{n-c}}$$

também é sobrejetor e a Afirmação 2 segue pelo mesmo argumento da Afirmação 1.

Da Afirmação 1, $s(S, n) \geq s(R, n) - s(R, n-1) = \Delta s(R, n-1)$, para $n \gg 0$. Sabemos pela Proposição 1.3.5, $\deg \Delta s(R, n) = \lambda(R) - 1$, e portanto $\lambda(S) \geq \lambda(R) - 1$, provando o item (a). Por outro lado, se r não é divisor de zero, a Afirmação 2 nos concede $c > 0$, tal que $s(S, n) \leq s(R, n) - s(R, n-c)$, para $n \gg 0$. Como no item (a), teremos $\lambda(S) \leq \lambda(R) - 1$, donde temos a igualdade proposta no item (b). \square

1.5 Dimensão e Sistemas de Parâmetros de um Módulo

Lembremos que a dimensão de um anel R , denotada por $\dim R$ é o comprimento máximo das cadeias ascendentes de ideais primos de R . A dimensão de um R -módulo M , intuitivamente, pensamos em cadeias máximas de ideais primos que contribuem para M , no sentido que estão no suporte de M .

Definição 1.5.1. Seja M um R -módulo não-nulo, então definimos a *dimensão de Krull* ou simplesmente *dimensão* de M por

$$\dim M = \dim \left(\frac{R}{\text{ann} M} \right).$$

Convencionamos a dimensão do módulo nulo igual a -1 . A *codimensão* de M é o número

$$\text{codim } M = \dim R - \dim M.$$

Exemplo 1.5.2. Considere $M = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ como \mathbb{Z}_4 -módulo. Observe que $\text{ann}_{\mathbb{Z}_4} M = (\bar{0})$, logo

$$\dim M = \dim \mathbb{Z}_4 / (\bar{0}) = \dim \mathbb{Z}_4 = 0,$$

pois \mathbb{Z}_4 é local com único ideal primo (maximal) $(\bar{2})$. O fato $\dim M = 0$ também é pelo fato de que M é \mathbb{Z}_4 -módulo Artiniano.

Para módulos finitamente gerados sobre anéis locais Noetherianos, temos outra importante

Definição 1.5.3. Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Um *sistema de parâmetros* de M é um conjunto $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathfrak{m}$ tal que $M/(a_1, \dots, a_n)M$ possui comprimento finito. A *dimensão de Chevallay*, denotada por $\delta(M)$, é o tamanho mínimo de um sistema de parâmetros.

Observação 1.5.4. Se (R, \mathfrak{m}) é anel local Noetheriano, então $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathfrak{m}$ é sistema de parâmetros se, e só se, $\sqrt{(a_1, \dots, a_n)} = \mathfrak{m}$. Isso pode ser visto de forma análoga a demonstração da Proposição 1.4.2. Em particular, qualquer conjunto gerador $\{a_1, \dots, a_d\}$ de um ideal de definição é um sistema de parâmetros.

Exemplo 1.5.5. Seja $S = k[[x, y, z]]$ o anel de séries formais sobre um corpo k , e $I = (xy, xz)$. Então $\{\bar{z}, \bar{x} + \bar{y}\}$ é um sistema de parâmetros de S/I . Para ver isso, denote $J = (\bar{z}, \bar{x} + \bar{y})$ e $\bar{\mathfrak{m}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o ideal maximal de S/I . Como $\bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{z} = \bar{0}$, temos que $\bar{x}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x}^2$ e $\bar{y}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{y}^2$. Logo, temos as inclusões $\bar{\mathfrak{m}}^2 = (\bar{x}^2, \bar{y}^2, \bar{z}^2, \bar{y}\bar{z}) \subseteq J \subseteq \bar{\mathfrak{m}}$. Portanto, J é um ideal de definição, e pela observação anterior, temos o desejado.

Exemplo 1.5.6. Considere

$$R = k[x, y]_{(x, y)} / (y^2 - x^3),$$

no qual k é um corpo qualquer. Então, $\{\bar{x}\}$ é um sistema de parâmetros de R . Com efeito, como $\bar{y}^2 = \bar{x}^3$, então $\bar{y} \in \sqrt{(\bar{x})}$. Daí, $\delta(R) \leq 1$. Mais ainda, se tivéssemos $\delta(R) = 0$, então $\mathfrak{m} = \sqrt{(\bar{0})}$, ou seja, \mathfrak{m} seria nilpotente e assim o polinômio de Hilbert-Samuel $s_{\mathfrak{m}}(R, n)$ seria constante, o que não é o caso pelo Exemplo 1.4.7. Logo, $\delta(R) = 1$.

No Exemplo 1.4.7. e no exemplo anterior vimos que $\lambda(R) = \delta(R) = 1$, onde R é o mesmo anel citado nestes exemplos. Mais ainda, $\dim R = 1$, pois temos a cadeia máxima de primos em R ,

$$(\bar{0}) \subseteq (\bar{x}, \bar{y}).$$

O próximo teorema nos diz que as igualdades $\lambda(R) = \delta(R) = \dim R$ ocorreram não apenas por coincidência. Estamos prontos então para o famoso Teorema da Dimensão de Krull.

Teorema 1.5.7 (Dimensão de Krull). *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Então, temos as igualdades*

$$\lambda(M) = \delta(M) = \dim M.$$

Demonstração. Mostraremos utilizando argumentos de indução que

$$\dim M \leq \lambda(M) \leq \delta(M) \leq \dim M.$$

Passo 1: $\dim M \leq \lambda(M)$.

Se $\lambda(M) = -1$, então $s_{\mathfrak{m}}(M, n) = \ell_R(M/\mathfrak{m}^n M) = 0$, para $n \gg 0$. Assim, $M/\mathfrak{m}^n M = 0$, ou seja, $M = \mathfrak{m}^n M$, logo pelo lema de Nakayama, $M = 0$ e $\dim M = -1$. Então, suponha que $\lambda(M) > 0$. Como $\text{Ass } M$ é um conjunto finito, seja $P \in \text{Ass } M$, tal que $\dim M = \text{coht } P = \dim R/P$. Por definição de primo associado, existe um morfismo injetor $R/P \rightarrow M$, e assim pelo Corolário 1.4.10, $\lambda(R/P) \leq \lambda(M)$. Se mostrarmos que $\dim R/P \leq \lambda(R/P)$, então segue o Passo 1, pois $\dim M = \dim R/P \leq \lambda(R/P) \leq \lambda(M)$. Para tal, é suficiente mostrar que para qualquer cadeia de ideais primos em R , $P = P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_t$ o comprimento t é no máximo $\lambda(R/P)$. Se $t = 0$, então $R/P \neq 0$ e $\lambda(R/P) \neq -1$. Dessa forma, assumamos $t \geq 1$ e que o resultado vale para $t - 1$. Escolha $a \in P_1 \setminus P$ e considere os ideais primos Q tais que $Ra + P \subseteq Q \subseteq P_1$. Como $Ra + P \subseteq Q$, então $(R/(Ra + P))_Q \neq 0$. Assim, escolha Q elemento minimal em $\text{Supp } (R/(Ra + P))$. Em particular, $Q \in \text{Ass } (R/(Ra + P))$. Dessa maneira existe morfismo injetor de R/Q para $R/(Ra + P)$ e por 1.4.10, $\lambda(R/Q) \leq \lambda(R/(Ra + P))$. Uma vez que a cadeia $Q \subsetneq \cdots \subsetneq P_t$ possui comprimento $t - 1$, a hipótese de indução implica que $t - 1 \leq \lambda(R/Q) \leq \lambda(R/(Ra + P))$. Aplicando o Teorema 1.4.9 na sequência exata

$$0 \longrightarrow R/P \xrightarrow{a} R/P \longrightarrow R/(Ra + P) \longrightarrow 0$$

obtemos,

$$s_{\mathfrak{m}}(R/P, n) + s_{\mathfrak{m}}(R/(Ra + P), n) = s_{\mathfrak{m}}(R/P, n) + r(n),$$

onde $r(n)$ é uma função de tipo-polinomial possuindo grau menor $\lambda(R/P)$. Dessa maneira a equação acima implica que $\lambda(R/(Ra + P)) < \lambda(R/P)$. Daí, $t - 1 < \lambda(R/P)$ e portanto, $t \leq \lambda(R/P)$.

Passo 2: $\lambda(M) \leq \delta(M)$.

Se $\delta(M) = -1$, então $M = 0$ e $\lambda(M) = -1$. Assuma $M \neq 0$, $r = \delta(M) \geq 0$ e sejam $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ tais que $\ell(M/(a_1, \dots, a_r)M) < \infty$.

Afirmção 3: Se $I = (a_1, \dots, a_r)$, $P = \text{ann} M$ e $Q = I + P$, então $\text{Supp}(R/Q) = \{\mathfrak{m}\}$.

Como $M/IM \cong M \otimes R/I$, temos que $\text{Supp}(M/IM) = \text{Supp}(M) \cap \text{Supp}(R/I)$ e ainda $V(P) \cap V(I) = V(Q) = \text{Supp}(R/Q)$. Por outro lado, $\text{Supp}(M/IM) = \{\mathfrak{m}\}$, o que prova a afirmação. Da mesma forma, $\text{Ass } R/Q = \{\mathfrak{m}\}$, ou seja, Q é um ideal \mathfrak{m} -primário, ou ainda, Q é um ideal de definição de R . Ponha $\bar{R} = R/P$, $\bar{Q} = Q/P$ e considere M como \bar{R} -módulo. Então \bar{R} é anel local Noetheriano e \bar{Q} é um ideal de definição de \bar{R} gerado por $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$. Dessa forma pela Observação 1.4.4, o grau do polinômio de Hilbert-Samuel $s_{\bar{Q}}(M, n)$ é no máximo r . Mas, pelo teorema da correspondência $\ell_{\bar{R}}(M, \bar{Q}^n M) = \ell_R(M, Q^n M)$, ou seja, $s_{\bar{Q}}(M, n) = s_Q(M, n)$. Onde, $\lambda(M) \leq r = \delta(M)$.

Passo 3: $\delta(M) \leq \dim M$ Se $\dim M = -1$, então $M = 0$ e $\delta(M) = -1$. Suponha então $M \neq 0$. Se $\dim M = 0$, então $\ell_R(M) < \infty$ e $\delta(M) = 0$. Assuma que $\dim M > 0$. Considere $P_1, \dots, P_t \in \text{Ass } M$ tais que $\text{coht } P_i = \dim M$, para $i = 1, \dots, t$. Como $\dim M > 0$, para cada i , $P_i \subseteq \mathfrak{m}$, e assim pelo lema da esquerda

$$\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^t P_i.$$

Daí, podemos escolher $a \in \mathfrak{m}$, tal que $a \notin P_i$, para cada i e denote $N = M/aM$.

Afirmção 4: $\text{Supp}(N) \subseteq \text{Supp}(M) \setminus \{P_1, \dots, P_t\}$.

Com efeito, se $N_P \neq 0$, então $M_P \neq 0$ e ainda $N_{P_i} = 0$, pois $a \notin P_i$, sendo que a é invertível. Como $\dim M = \text{coht } P_i$, pela Afirmção 4, $\dim N < \dim M$, ou ainda, $\dim N + 1 \leq \dim M$. Considere $r = \delta(N)$ e $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ tais que $N/(a_1, \dots, a_r)N$ possui comprimento finito. Por outro lado, pelo primeiro teorema dos isomorfismos temos

$$M/(a, a_1, \dots, a_r)M \cong N/(a_1, \dots, a_r)N.$$

Assim, $\delta(M) \leq r + 1$, e por hipótese de indução $\delta(N) \leq \dim N$. Contudo,

$$\delta(M) \leq r + 1 = \delta(N) + 1 \leq \dim N + 1 \leq \dim M.$$

□

Capítulo 2

Módulos Cohen-Macaulay

Módulos Cohen-Macaulay são aqueles em que o invariante algébrico coincide com o invariante geométrico. Apesar de ser uma hipótese forte, ainda é suficientemente geral, no sentido que existem uma imensa quantidade de exemplos de tal estrutura na geometria algébrica, teoria dos invariantes e na combinatória. Já os anéis regulares são no melhores tipos de anéis Cohen-Macaulay, isso pois são versões mais abstratas de anéis de polinômios e de séries formais sobre um corpo. Aqui estudaremos algumas de suas principais características e propriedades, introduzindo mais um importantíssimo invariante em álgebra comutativa.

2.1 Sequências Regulares

Definição 2.1.1. Seja M um R -módulo. Dizemos que $x \in R$ é um *elemento M -regular* se $xm = 0$ implica $m = 0$, para todo $m \in M$, noutras palavras, x não é divisor de zero em M .

Definição 2.1.2. Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ de elementos de R é dita ser uma *M -sequência regular* ou apenas uma *M -sequência* se:

- (a) x_i é um elemento $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ -regular, para todo $i = 1, \dots, n$;
- (b) $M/\mathbf{x}M \neq 0$.

Em algumas situações, podemos dizer também que M é um *\mathbf{x} -regular módulo*. Uma sequência \mathbf{x} é dita ser uma *M -sequência fraca*, se somente a condição (a) for satisfeita.

Observação 2.1.3. Se (R, \mathfrak{m}) for anel local, M um R -módulo finitamente gerado e $\mathbf{x} \subseteq \mathfrak{m}$, então a condição (b) é automaticamente satisfeita pelo lema de Nakayama.

Exemplo 2.1.4. Um exemplo clássico de sequência regular é $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ no anel de polinômios $R = S[x_1, \dots, x_n]$. Se S for um corpo, esta também é uma sequência regular no anel de séries formais $F = S[[x_1, \dots, x_n]]$.

Exemplo 2.1.5. A sequência $xz - y^2, x^2t^2 - yz^3, x^2yt^2 - xz^4$ não é uma R -sequência, onde $R = S[x, y, z, t]$. De fato, note que $-z^3(xz - y^2) + y(x^2t^2 - yz^3) = x^2yt^2 - xz^4$, logo

$$x^2yt^2 - xz^4 \equiv 0 \pmod{(xz - y^2, x^2t^2 - yz^3)}$$

Dessa forma, $x^2yt^2 - xz^4$ não é elemento $R/(xz - y^2, x^2t^2 - yz^3)$ -regular.

O próximo exemplo nos diz que permutações de sequências regulares nem sempre resultam em sequências regulares.

Exemplo 2.1.6. Sejam k um corpo e $S = k[x, y, z]$. Mostraremos que $x(y-1), y, z(y-1)$ é uma S -sequência, mas $x(y-1), z(y-1), y$ não é uma S -sequência. De fato, é claro que $x(y-1)$ é não-divisor de zero em S . Se para $f \in S$, $y\bar{f} = \bar{0}$ em $S/(x(y-1))$, então existe $g \in S$ tal que

$$yf = x(y-1)g.$$

Isto nos diz que, $y \mid x(y-1)g$, mas $y \nmid x(y-1)$, implicando que $y \mid g$. Logo, $g = yg'$, para algum $g' \in S$. Assim,

$$yf = x(y-1)yg',$$

isto é, $f = x(y-1)g'$ e $\bar{f} = \bar{0}$. Isso mostra que y é elemento $S/(x(y-1))$ -regular. Para mostrar que $z(y-1)$ é regular em $S/(x(y-1), y)$ considere $h \in S$ tal que $z(y-1)\bar{h} = \bar{0}$. Isto equivale a dizer que

$$z(y-1)h \in (x(y-1), y) = (x, y).$$

Como $z \notin (x, y)$, $y-1 \notin (x, y)$ e o ideal (x, y) é primo segue que $h \in (x(y-1), y)$, ou seja, $\bar{h} = \bar{0}$. Além disso,

$$S \neq (x(y-1), y, z(y-1)) = (x, y, z) = (x, y, z)S,$$

isto é, $S/(x, y, z)S \neq 0$. Temos mostrado então que $x(y-1), y, z(y-1)$ é uma S -sequência. Para ver que $x(y-1), z(y-1), y$ não é uma S -sequência, basta notar que

$$x(z(y-1)) = z(x(y-1)) \in (x(y-1)),$$

mas $x \notin (x(y-1))$.

Em contrapartida ao exemplo anterior, temos condições para que qualquer permutação de uma sequência regular ainda seja uma sequência regular. Isto é mostrado na proposição a seguir.

Proposição 2.1.7. *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano R , $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência em que todos os x_i 's estão no radical de Jacobson $J(R)$. Então qualquer permutação de \mathbf{x} é uma M -sequência.*

Demonstração. Como toda permutação é produto de transposições adjacentes, então basta considerar a transposição intercambiando x_1 e x_2 . Primeiramente, x_1 é elemento M/x_2M -regular. Para isto, suponha $x_1\bar{m} = \bar{0}$, com $\bar{m} \in M/x_2M$. Daí, $x_1m \in x_2M$, e existe $m' \in M$ tal que $x_1m = x_2m'$. Como por hipótese x_2 é elemento M/x_1M -regular, então $m' \in x_1M$. Dessa forma, $m' = x_1z$, para algum $z \in M$. Como x_1 é M -regular, então $m = x_2z$, o que implica $\bar{m} = \bar{0}$. Falta mostrar que x_2 é M -regular. Para tal, mostraremos que se N é um submódulo de M anulado por x_2 , então $N = x_1N$, pois assim como $x_1 \in J(R)$, pelo lema de Nakayama, $N = 0$. Já temos $x_1N \subseteq N$, então basta mostrar que $N \subseteq x_1N$. Se $n \in N$, então $x_2n = 0$. Como x_2 é M/x_1M -regular, então $n \in x_1M$, digamos $n = x_1w$, para algum $w \in M$. Dessa forma, $x_2x_1w = x_2n = 0$. Porém, x_1 é M -regular, implicando que $x_2w = 0$ e $w \in N$. Donde, $n = x_1w \in x_1N$, como queríamos. \square

Corolário 2.1.8. *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Então qualquer permutação de uma M -sequência também é uma M -sequência.*

Demonstração. Os termos de uma M -sequência são não-invertíveis, logo estão no maximal $\mathfrak{m} = J(R)$ e o resultado segue da Proposição anterior. \square

A próxima proposição nos diz condições para que a regularidade de uma sequência seja carregada quando estendemos o módulo.

Proposição 2.1.9. *Considere os anéis R, S , M um R -módulo, $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência fraca, $\varphi : R \rightarrow S$ um morfismo, e N é um S -módulo, R -plano. Então $\mathbf{x} \subseteq R$ e $\varphi(\mathbf{x}) \subseteq S$ são $(M \otimes_R N)$ -sequências fracas. Se $\mathbf{x}(M \otimes_R N) \neq (M \otimes_R N)$, então \mathbf{x} e $\varphi(\mathbf{x})$ são $(M \otimes_R N)$ -sequências.*

Demonstração. Por definição a multiplicação por x_i coincide com a multiplicação por $\varphi(x_i)$, então consideremos apenas \mathbf{x} . Por indução em n , consideremos $n = 1$. O caso geral é feito de forma similar. Como x_1 é M -regular, a multiplicação $x_1 : M \rightarrow M$ é injetiva, e assim $x_1 \otimes N$ também é, pois N é plano. Daí, x_1 é $(M \otimes_R N)$ -regular, uma vez que $x_1 \otimes N$ é a multiplicação por x_1 em $(M \otimes_R N)$. Além disso, $0 \neq (M \otimes_R N)/x_1(M \otimes_R N) \cong (M/x_1M) \otimes_R N$ e assim $M/x_1M \neq 0$. \square

Corolário 2.1.10. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado, \mathbf{x} uma M -sequência e um $P \in \text{Supp}(M)$ contendo \mathbf{x} . Então \mathbf{x} (vista em R_P) é uma M_P -sequência.*

Demonstração. Considere o mapa de localização $R \rightarrow R_P$. Sabemos que R_P é R -plano. Mais ainda, por hipótese $M_P \neq 0$, logo pelo lema de Nakayama $M_P \neq PM_P$. Em particular, $M_P \neq \mathbf{x}M_P$, e segue o resultado pela Proposição anterior. \square

As duas próximas proposições são muito importantes para trabalhar com sequências regulares em termos homológicos.

Proposição 2.1.11. *Sejam R um anel, M um R -módulo e \mathbf{x} uma M -sequência fraca. Então qualquer sequência exata*

$$N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

de R -módulos induz uma sequência exata

$$N_2/\mathbf{x}N_2 \rightarrow N_1/\mathbf{x}N_1 \rightarrow N_0/\mathbf{x}N_0 \rightarrow M/\mathbf{x}M \rightarrow 0.$$

Demonstração. Por indução basta considerar o caso em que $\mathbf{x} = x$. Como para cada $i = 0, 1, 2$, $N_i \otimes R/(x) \cong N_i/(x)N_i$ e $M \otimes R/(x) \cong M/(x)M$, se tensorizarmos por $R/(x)$ a sequência

$$N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

obtemos o complexo

$$N_2/xN_2 \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} N_1/xN_1 \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} N_0/xN_0 \xrightarrow{\bar{\varphi}_0} M/xM \rightarrow 0.$$

Uma vez que o funtor $- \otimes R/(x)$ é exato à direita, falta mostrar apenas a exatidão em N_1/xN_1 , isto é, $\ker \bar{\varphi}_1 \subseteq \text{Im} \bar{\varphi}_2$. Então seja $n_1 \in \ker \bar{\varphi}_1$. Daí, $\bar{\varphi}_1(n_1) = \bar{0}$, e existe $n_0 \in N_0$ tal que $\varphi_1(n_1) = n_0$ e $x\varphi_0(n_0) = 0$. Como x é M -regular, então $\varphi_0(n_0) = 0$, ou seja, $n_0 \in \ker \varphi_0 = \text{Im} \varphi_1$. Logo, existe $n'_1 \in N_1$ tal que $n_0 = \varphi_1(n'_1)$. Dessa forma, $\varphi_1(n_1) = x\varphi_1(n'_1)$, equivalentemente, $\varphi_1(n_1 - xn'_1) = 0$. Portanto, $n_1 - xn'_1 \in \ker \varphi_1 = \text{Im} \varphi_2$, e $\bar{n}_1 \in \text{Im} \bar{\varphi}_2$. \square

Proposição 2.1.12. *Sejam R um anel e*

$$N_{\bullet} : \cdots \longrightarrow N_m \xrightarrow{\varphi_m} N_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_0 \xrightarrow{\varphi_0} N_{-1} \longrightarrow 0$$

um complexo exato de R -módulos. Se \mathbf{x} é uma N_i -sequência fraca, para todo i , então o complexo $N_{\bullet} \otimes R/(\mathbf{x})$ é exato.

Demonstração. Como nas proposições anteriores, por indução no comprimento basta tratarmos o caso em que $\mathbf{x} = x$. Como x é N_i -regular, também o é $\text{Im}\varphi_{i+1}$ -regular. Aplicando a Proposição 2.1.11 a cada sequência exata

$$N_{i+3} \longrightarrow N_{i+2} \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow \text{Im}\varphi_{i+1} \longrightarrow 0$$

temos o desejado. □

Sejam R um anel, M um R -módulo e denote $X = X_1, \dots, X_n$ indeterminadas sobre R . Escreveremos $M[X]$ para representar $M \otimes R[X]$. Como $R[X]$ é um R -módulo livre com base $\{X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}\}_{\{i_1, \dots, i_n\} \geq 0}$, então todo elemento em $M[X]$ é uma soma finita da forma

$$\sum m_{i_1, \dots, i_n} \otimes X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}.$$

Dessa forma, podemos falar de *coeficientes* e de *grau* de um elemento de $M[X]$ e o chamaremos de *polinômio com coeficientes em M* . Se $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma sequência de elementos em R , então a substituição $X_i \mapsto x_i$, induz o morfismo $R[X] \rightarrow R$, dado por

$$\sum a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \mapsto \sum x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} (a_{i_1, \dots, i_n})$$

Da mesma maneira, teremos o morfismo $M[X] \rightarrow M$, no qual

$$\sum m_{i_1, \dots, i_n} \otimes X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \mapsto \sum x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} (m_{i_1, \dots, i_n})$$

Denotaremos por $F(\mathbf{x})$ a imagem de $F \in M[X]$ sobre a aplicação acima.

Teorema 2.1.13 (Rees). *Seja R um anel, M um R -módulo, $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência e $I = (\mathbf{x})$. Se $F \in M[X]$ é homogêneo de grau d e $F(\mathbf{x}) \in I^{d+1}M$, então os coeficientes de F estão em IM .*

Demonstração. Faremos por indução em n . Se $n = 1$, então escreva $F = \sum m \otimes x_1^d$, daí $F(x_1) = x_1^d m \in I^{d+1}M$, logo existe $z \in M$, tal que $F(x_1) = x_1^d m = x_1^{d+1} z$. Como x_1 é M -regular, então $F(x_1) = x_1 z \in IM$. Então, suponha $n > 1$ e o teorema válido para sequências regulares no máximo $n - 1$.

Afirmção: Sendo $J = (x_1, \dots, x_{n-1})$, então x_n é $M/J^j M$, para todo $j \geq 1$.

Com efeito, argumentando por indução temos que $y \in J^{i-1}M$, e podemos escrever $y = G(x_1, \dots, x_{n-1})$, com $G \in M[X_1, \dots, X_{n-1}]$ homogêneo de grau $j - 1$. Coloque $G' = x_n G$. Por hipótese de indução, os coeficientes de G estão em JM . Como x_n é regular módulo JM , os coeficientes de G estão em JM , e assim $y \in J^j M$.

Para provar o teorema em sequências de comprimento n , precisamos de uma nova indução, agora

sobre d . Se $d = 0$, não há o que fazer. Suponha $d > 0$. Primeiramente, provaremos o caso em que $F(\mathbf{x}) = 0$. Então, escrevamos $F = G + X_n H$, com $G \in M[X_1, \dots, X_{n-1}]$. A afirmação acima, nos garante que $H(\mathbf{x}) \in J^d M \subseteq I^d M$. Pela indução em d , os coeficientes de H estão em IM . Por outro lado, $H(\mathbf{x}) = H'(x_1, \dots, x_{n-1})$ com $H' \in M[X_1, \dots, X_{n-1}]$ homogêneo de grau d . Daí, $(G + x_n H')(X_1, \dots, X_{n-1}) = F(\mathbf{x}) = 0$ e pela indução em n , os coeficientes de $G + x_n H'$, estão em IM . Uma vez que, $x_n H'$ tem seus coeficientes em IM , os coeficientes de G devem estar em IM , e assim também os de F . Para o caso geral, como $F(\mathbf{x}) \in I^{d+1} M$, tem-se $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$, com $G = \sum_{i=1}^n X_i G_i$, com os G_i homogêneos de grau d . Pondo, $G'_i = X_i G_i$ e $G' = \sum_{i=1}^n G'_i$, tem-se que $F - G'$ é homogêneo de grau d e $(F - G')(\mathbf{x})$. Pelo caso anterior, os coeficientes de $F - G'$ estão em IM , donde os coeficientes de F também estão. \square

Como consequência do Teorema 2.1.13, podemos relacionar uma sequência regular com o módulo graduado associado do ideal gerado pela sequência.

Teorema 2.1.14. *Sejam R um anel, M um R -módulo, $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência e $I = (\mathbf{x})$. Então o mapa $(M/IM)[X] \rightarrow \text{gr}_I(M)$, induzido pela substituição $X_i \mapsto x_i + I^2$ é um isomorfismo.*

Demonstração. A projeção $R \rightarrow R/I$ e a substituição $X_i \mapsto x_i + I^2$, induz um morfismo sobrejetor de anéis $R[X] \rightarrow \text{gr}_I(R)$, uma vez que $\text{gr}_I(R)$ é gerado pelos elementos $x_i + I^2$. Analogamente, se $F \in M[X]$ é homogêneo de grau d , então $F(\mathbf{x}) \in I^d M / I^{d+1} M$, e estendendo por aditividade conseguimos um morfismo sobrejetor $\psi : M[X] \rightarrow \text{gr}_I(M)$. Claramente, $IM[X] \subseteq \ker \psi$, o que induz $\psi' : M[X]/IM[X] \rightarrow \text{gr}_I(M)$. Composto com o isomorfismo canônico $M[X]/IM[X] \cong (M/IM)[X]$, temos um novo morfismo sobrejetor $\varphi : (M/IM)[X] \rightarrow \text{gr}_I(M)$. O núcleo de ψ é gerado pelos polinômios homogêneos $F \in M[X]$ de grau d , com $d \in \mathbb{N}$, tais que $F(\mathbf{x}) \in I^{d+1} M$, pelo Teorema 2.1.13 os coeficientes de F estão em IM , e o resultado segue do primeiro teorema dos isomorfismos. \square

Um fato interessante é que se $\mathbf{x} + I^2 = x_1 + I^2, \dots, x_n + I^2$ é uma $\text{gr}_I(M)$ -sequência, não necessariamente $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência.

Exemplo 2.1.15. Considere $R = k[x, y, z]/(xz, x - xy)$, $I = (\bar{y})$ e $\bar{f} = \bar{y}\bar{z}$, onde k é um corpo. É claro que \bar{y} é R -regular, logo pelo Teorema 2.1.14,

$$\text{gr}_I(R) \cong (R/I)[X] \cong (k[z])[X].$$

Donde $\text{gr}_I(R)$ é um domínio e assim $\bar{f} + I^2$ é $\text{gr}_I(R)$ -regular. Por outro lado a equação $\bar{x}\bar{f} = \bar{0}$, nos diz que \bar{f} é divisor de zero em R .

Em compensação, a proposição a seguir nos diz que sequência regulares no anel graduado associado provém de sequências regulares no anel original, no caso em que este é local.

Proposição 2.1.16. *Sejam R um anel local Noetheriano e $x_1, \dots, x_n \in R$, tal que $I = (x_1, \dots, x_n)$ é um ideal próprio. Se $\mathbf{x} + I^2 = x_1 + I^2, \dots, x_n + I^2$ é uma $\text{gr}_I(R)$ -sequência, então $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma R -sequência.*

Demonstração. Por indução no comprimento da sequência podemos supor que $\mathbf{x} = x$, e assim basta mostrar que x é R -regular. Por isso, suponha $xy = 0$. Se $y \neq 0$, então pelo Corolário 1.2.9, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $y \notin I^n$. Por outro lado,

$$(x + I^2)(y + I^n) = xy + I^{n+1} = 0.$$

Pela regularidade de $x + I^2$, temos que $y \in I^n$, uma contradição. Logo, $y = 0$ e x é R -regular. \square

2.2 Grade e Profundidade

Considere R um anel Noetheriano e M um R -módulo. Se $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência, então obtemos uma cadeia ascendente

$$(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \dots \subsetneq (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Portanto, qualquer pode ser estendida a uma sequência maximal, que definimos a seguir.

Definição 2.2.1. Uma M -sequência $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n \in I$ é dita *maximal em I* , se x_1, \dots, x_n, x_{n+1} não é uma M -sequência, para qualquer $x_{n+1} \in I$.

Geralmente, sequências maximais podem possuir comprimentos distintos.

Exemplo 2.2.2. Seja k um corpo e $R = k[[x]][y]$. As sequências x, y e $1 - xy$ são R -sequências maximais. Para isso, temos os isomorfismos

$$\frac{k[[x]][y]}{(x, y)} \cong k \quad \frac{k[[x]][y]}{(1 - xy)} \cong k[[x]]_x \cong k((x)).$$

Como k e $k((x))$ são corpos, então os ideais (x, y) e $(1 - xy)$ são maximais em $k[[x]][y]$, e assim as sequências não podem ser estendidas para R -sequências de comprimento maior.

Neste momento, nosso objetivo é mostrar que todas as M -sequências maximais em um ideal I , tal que $IM \neq M$ (o que não é o caso do exemplo anterior), possuem o mesmo comprimento, se M é finitamente gerado.

Proposição 2.2.3. Seja R um anel Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Se $I \subseteq R$ é um ideal consistindo de divisores de zero de M , então $I \subseteq P$, para algum $P \in \text{Ass } M$.

Demonstração. Se $I \not\subseteq P$, para todo $\text{Ass } M$, que é um conjunto finito (R é anel Noetheriano), então pelo lema da esquiva existe $a \in I$, com $a \notin P$, para todo $P \in \text{Ass } M$. Logo, $a \in I$ não é divisor de zero em M . \square

Observação 2.2.4. Considere R um anel e M um R -módulo. Se um ideal I está contido em algum $P \in \text{Ass } M$ então existe um morfismo injetor $\psi : R/P \rightarrow M$. Em especial, existe um morfismo não nulo $\varphi : R/I \rightarrow M$.

Ideais consistindo de divisores de zero, podem ser tratados em termos homológicos.

Proposição 2.2.5. Considere R um anel, M, N R -módulos e $I = \text{ann } N$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) Se I contém um elemento M -regular, então $\text{Hom}_R(N, M) = 0$;
- (b) Reciprocamente, se R é Noetheriano, M, N são finitamente gerados e $\text{Hom}_R(N, M) = 0$, então temos a existência de um elemento M -regular em I .

Demonstração. (a) Seja $h \in \text{Hom}_R(N, M)$, $n \in N$ e $x \in I$ um elemento M -regular. Então, $xh(n) = h(xn) = h(0) = 0$. Pela regularidade de x , tem-se $h(n) = 0$ e h é o morfismo nulo. (b) Suponha que I consista de divisores de zero de M . Pela Proposição 2.2.3, existe $P \in \text{Ass } M$ no qual $I \subseteq P$. Da hipótese, $P \in \text{Supp}(N)$. Temos que $N_P \otimes k(P) \neq 0$, pois caso contrário, pelo lema de Nakayama teríamos $N_P = 0$, mas isto não acontece, desde que $I \subseteq P$ ($k(P)$ denota o corpo residual R_P/PR_P). Uma vez que, $N_P \otimes k(P)$ é uma soma direta de cópias de $k(P)$, temos um morfismo sobrejetor $N_P \rightarrow k(P)$. Observe que $PR_P \in \text{Ass}(M_P)$. Pela Observação 2.2.4, existe $\varphi' \in \text{Hom}_{R_P}(N_P, M_P)$ não-nulo. Logo $\text{Hom}_R(N, M) \neq 0$, por causa do isomorfismo $\text{Hom}_{R_P}(N_P, M_P) \cong \text{Hom}_R(N, M)_P$. \square

Estamos quase prontos para mostrar que sequências maximais possuem o mesmo comprimento (no caso citado anteriormente), o qual pode ser calculado em termos homológicos. Mas ainda precisamos do seguinte

Lema 2.2.6. *Seja R um anel, M, N R -módulos e $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência fraca em $\text{ann } M$. Então,*

$$\text{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M) \cong \text{Ext}_R^n(N, M).$$

Demonstração. Novamente argumentaremos por indução sobre n . Por vacuidade o caso $n = 0$ é satisfeito. Seja $n \geq 1$ e denote $\mathbf{x}' = x_1, \dots, x_{n-1}$. Por hipótese de indução tem-se

$$\text{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}'M) \cong \text{Ext}_R^{n-1}(N, M).$$

Por definição, x_n é $(M/\mathbf{x}'M)$ -regular, então pela Proposição 2.2.5, obtemos $\text{Ext}_R^{n-1}(N, M) = 0$. Daí, a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x_1} M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0$$

induz uma nova sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \xrightarrow{\psi} \text{Ext}_R^n(N, M) \xrightarrow{\varphi} \text{Ext}_R^n(N, M)$$

O mapa φ é a multiplicação por x_1 herdada de M . Como $x_1 \in \text{ann } N$, então $\varphi = 0$. Dessa forma, ψ é um isomorfismo, e utilizando um novo argumento indutivo temos

$$\text{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M) \cong \text{Ext}_R^0(N, \mathbf{x}M) \cong \dots \cong \text{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \cong \text{Ext}_R^n(N, M).$$

\square

Teorema 2.2.7 (Rees). *Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal tal que $IM \neq M$. Então todas as M -sequências maximais em I possuem o mesmo comprimento n , que é dado por*

$$n = \min\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}$$

Demonstração. Considere $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência maximal em I . Como $\text{ann} R/I = I$ e I contém um elemento $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ -regular para cada $i = 1, \dots, n$, então pela Proposição 2.2.5 e pelo Lema 2.2.6, $0 = \text{Hom}_R(R/I, M/(x_1, \dots, x_{i-1})M) \cong \text{Ext}_R^{i-1}(R/I, M)$. Além disso, uma vez que $IM \neq M$ e \mathbf{x} é uma sequência maximal, I consiste em divisores de zero de $M/\mathbf{x}M$. Logo pelo item (b) da Proposição 2.2.5, segue que $\text{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{x}M) \neq 0$. Aplicando novamente o isomorfismo descrito no Lema 2.2.6, temos $\text{Ext}_R^n(R/I, M) \neq 0$. \square

Dessa forma podemos definir um novo invariante de muita importância em álgebra comutativa.

Definição 2.2.8. Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal tal que $IM \neq M$. O comprimento de uma sequência maximal em I é chamado *grade de I em M* e é denotado por

$$\text{grade}(I, M).$$

Se $IM = M$, colocamos $\text{grade}(I, M) = \infty$.

Observação 2.2.9. Quando $IM = M$, a definição de grade é consistente com o Teorema 2.2.7, pois $\text{grade}(I, M) = \infty$ se, e só se, $\text{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$, para todo i . Para ver isso, se $IM = M$, tem-se $0 = M/IM \cong M \otimes R/I$, o que implica $\text{Supp}(M) \cap \text{Supp}(R/I) = \emptyset$. Do isomorfismo $\text{Ext}_{R_P}^i(N_P, M_P) \cong \text{Ext}_R^i(R/I, M)_P$, segue que $\text{Supp}(\text{Ext}_R^i(R/I, M)) \subseteq \text{Supp}(M) \cap \text{Supp}(R/I) = \emptyset$, e assim $\text{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$, para qualquer i . Reciprocamente, se

$$\text{Ext}_R^i(R/I, M) = 0,$$

para todo i , o Teorema 2.2.7 nos concede $IM = M$.

Como um caso especial do grade, definimos a profundidade de um módulo.

Definição 2.2.10. Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Então o grade de \mathfrak{m} em M é chamado de *profundidade de M* , e o denotamos por $\text{depth } M$.

Exemplo 2.2.11. Considere o anel de polinômios $R_1 = k[x_1, \dots, x_n]$ e o anel de séries formais $R_2 = k[[x_1, \dots, x_n]]$ em n indeterminadas sobre um corpo k . Uma vez que a sequência x_1, \dots, x_n é maximal em ambos os anéis, então se $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\text{grade}(\mathfrak{m}, R_1) = \text{depth}(R_2) = n.$$

Como este caso especial é muito utilizado, reescreveremos o Teorema 2.2.7.

Teorema 2.2.12. Seja M um módulo não-nulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}, k) . Então,

$$\text{depth } M = \min\{i : \text{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}.$$

Exemplo 2.2.13. Seja $R = k[[x, y]]/(x^2, xy)$. O seu ideal maximal $\mathfrak{m} = (\bar{x}, \bar{y})$ está em $\text{Ass } R$, pois $(\bar{x}, \bar{y}) = \text{ann}(\bar{x})$. Assim, temos uma inclusão $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow R$, e portanto

$$0 \neq \text{Hom}(k, R) \cong \text{Ext}_R^0(k, R).$$

Desse modo, pelo teorema anterior, $\text{depth } R = 0$. Na verdade, esses mesmos argumentos mostram um caso mais geral: Se M é um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}, k) , então $\text{depth } M = 0$ se, e só se, $\mathfrak{m} \in \text{Ass } M$.

Para calcular grades em geral, a próxima proposição é bastante utilizada.

Proposição 2.2.14. *Considere R um anel Noetheriano I, J ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado. Então:*

- (a) $\text{grade}(I, M) = \inf\{\text{depth } M_P : P \in V(I)\};$
- (b) $\text{grade}(I \cap J, M) = \min\{\text{grade}(I, M), \text{grade}(J, M)\};$
- (c) $\text{grade}(I, M) = \text{grade}(\sqrt{I}, M);$
- (d) *Se $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência em I , temos*

$$\text{grade}(I/(\mathbf{x}), M/\mathbf{x}M) = \text{grade}(I, M/\mathbf{x}M) = \text{grade}(I, M) - n;$$

- (e) *Se N é um R -módulo com $\text{Supp}(N) = V(I)$, temos*

$$\text{grade}(I, M) = \inf\{i : \text{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}.$$

Demonstração. (a) É claro que $\text{grade}(I, M) \leq \text{grade}(P, M)$, para $P \in V(I)$, e do Corolário 2.1.10 tem-se $\text{grade}(I, M) \leq \text{depth } M_P$. Temos dois casos:

Caso 1: $IM = M$. Neste caso $\text{grade}(I, M) = \infty$ e como na Observação 2.2.9, obtemos $\text{Supp}(M) \cap V(I) = \emptyset$, implicando que para todo $P \in V(I)$, $M_P = 0$. Pelo lema de Nakayama $PR_P M_P = M_P$, ou seja, $\text{depth } M_P = \infty$.

Caso 2: $IM \neq M$. Escolha \mathbf{x} uma sequência maximal em I . Por 2.2.3, podemos tomar $P \in \text{Ass } M/\mathbf{x}M$, com $I \subseteq P$. Como $PR_P \in \text{Ass } (M/\mathbf{x}M)_P$, e $(M/\mathbf{x}M)_P \cong M_P/\mathbf{x}M_P$, o ideal PR_P consiste de divisores de zero de $M/\mathbf{x}M_P$, e \mathbf{x} vista em R_P é uma M_P -sequência maximal.

Como $V(I \cap J) \subseteq V(I), V(J)$, pelo item (a),

$$\text{grade}(I \cap J, M) \leq \text{grade}(I, M), \text{grade}(J, M)$$

e assim segue o item (b).

Sabemos que $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$, e assim como no item (b),

$$\begin{aligned} \text{grade}(\sqrt{I}, M) &= \inf\{\text{grade}(P, M) : P \in V(I)\} \\ &= \inf\{\text{depth } M_P : P \in V(I)\} \\ &= \text{grade}(I, M), \end{aligned}$$

no qual a última igualdade é o item (a).

Para o item (d), denote $\bar{R} = R/(\mathbf{x})$, $\bar{I} = I/(\mathbf{x})$ e $\bar{M} = M/\mathbf{x}M$. Observe que $IM = M$ é equivalente a $I\bar{M} = \bar{M}$ e $\bar{I}\bar{M} = \bar{M}$. Mais ainda, $y_1, \dots, y_n \in I$ é uma \bar{M} -sequência se, e só se, $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n \in \bar{I}$ forma uma \bar{M} -sequência. Dessa forma, $\text{grade}(\bar{I}, \bar{M}) = \text{grade}(I, \bar{M})$. Para a segunda igualdade, temos pelo Teorema 2.2.7,

$$\begin{aligned} \text{grade}(I, M/\mathbf{x}M) &= \min\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, M/(x_1, \dots, x_n)M) \neq 0\} \\ &= \min\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\} - n \\ &= \text{grade}(I, M) - n. \end{aligned}$$

Finalmente mostremos o item (e). Como $\text{Supp}(N) = V(I)$, então $\sqrt{\text{ann}N} = \sqrt{I}$ e por (b) podemos assumir que $I = \text{ann}N$. Repetindo a demonstração do Teorema 2.2.7, com N no lugar de R/I junto com a Observação 2.2.9, demonstramos este item. \square

Também temos a noção de grade para módulos.

Definição 2.2.15. Seja M um módulo não-nulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano R . Definimos o *grade de M* por

$$\text{grade } M = \min\{i : \text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\}.$$

Se $M = 0$, tomamos $\text{grade } M = \infty$.

Observação 2.2.16. Fazendo $I = \text{ann}M$, $R = M$ e $N = M$ no item (e) da Proposição 2.2.14, conseguimos

$$\text{grade } M = \text{grade}(\text{ann}M, R).$$

Às vezes, denotamos $\text{grade } I = \text{grade } R/I = \text{grade}(I, R)$, para $I \subseteq R$ um ideal, mas não confunda, isto não significa o grade do módulo I .

Podemos calcular a dimensão de módulos finitamente gerados sobre anéis locais Noetherianos, quocientando por submódulos gerados por elementos convenientes.

Proposição 2.2.17. Considere M um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) e elementos $a_1, a_2, \dots, a_t \in \mathfrak{m}$. Então

$$\dim(M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M) \geq \dim M - t.$$

Além disso, a igualdade acontece se, e somente se, $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ pode ser estendido a um sistema de parâmetros de M .

Demonstração. Utilizaremos indução em t . Se $t = 1$, faça $N = M/a_1M$ e considere $\{b_1, \dots, b_r\} \subseteq \mathfrak{m}$ tal que $\ell_R(N/(b_1, \dots, b_r)N) < \infty$, sendo $r = \delta(N)$. O seguinte isomorfismo

$$\frac{N}{(b_1, \dots, b_r)N} = \frac{M/a_1M}{((b_1, \dots, b_r)M + a_1M)/a_1M} \cong \frac{M}{(a_1, b_1, \dots, b_r)M}$$

nos garante que $\ell_R(M/(a_1, b_1, \dots, b_r)N) < \infty$, ou seja, $\delta(M) \leq \delta(N) + 1$, e pelo Teorema 1.5.7, isto equivale a, $\dim M/a_1M \geq \dim M - 1$. Sendo $t > 1$, definindo $N = M/(a_2, \dots, a_t)M$, pelo caso $t = 1$, $\dim N/a_1N \geq \dim N - 1$ e pela hipótese de indução $\dim N \geq \dim M - (t - 1)$. Uma vez que $N/a_1N \cong M/(a_1, \dots, a_t)M$, temos o seguinte

$$\dim M/(a_1, \dots, a_t)M \geq \dim N - 1 \geq \dim M - (t - 1) - 1 \geq \dim M - t$$

o que prova a primeira afirmação. Agora, suponha que $\dim(M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M) = n - t$, com $n = \dim M$. Pelo Teorema 1.5.7, é possível escolher um sistema de parâmetros $\{a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_n\}$ para $(M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M)$. Denote $N = M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M$. O isomorfismo

$$N/M/(a_{t+1}, \dots, a_n)N \cong M/(a_1, a_2, \dots, a_n)M$$

implica que $\ell_R(M/(a_1, a_2, \dots, a_n)M) < \infty$, concluindo que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é um sistema de parâmetros de M . De outro lado, suponha que $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ pode ser estendido a um sistema de parâmetros $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ para M . Outra vez, se $N = M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M$ teremos $\ell_R(M/(a_1, a_2, \dots, a_n)M) < \infty$, e assim $\delta(N) \leq n - t$ que é equivalente a

$$\dim M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M \leq \dim M - t.$$

Como pela primeira parte já temos $\dim M/(a_1, a_2, \dots, a_t)M \geq \dim M - t$, segue a igualdade desejada. \square

No caso de M -sequências a desigualdade da Proposição 2.2.17 torna-se igualdade.

Teorema 2.2.18. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano R . Se $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência, então $\dim(M/\mathbf{x}M) = \dim M - n$.*

Demonstração. Provemos o caso: se x é M -regular, então $\dim M/xM = \dim M - 1$. O caso geral, segue por indução em n , utilizando este caso. Já temos a desigualdade $\dim M/xM \geq \dim M - 1$. Note que $(x) + \text{ann}M \subseteq \text{ann}(M/xM)$, o morfismo mudança de classe

$$\pi : \frac{R}{(x) + \text{ann}M} \longrightarrow \frac{R}{\text{ann}(M/xM)}$$

é sobrejetor e assim $\dim(R/\text{ann}M/xM) \leq \dim(R/((x) + \text{ann}M))$.

Afirmção: Se $S = R/\text{ann}M$ então \bar{x} é elemento S -regular.

Para isso, se $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$, então $xy \in \text{ann}M$. Daí, para cada $m \in M$, $xym = 0$, e como x é M -regular, então $ym = 0$, e $y \in \text{ann}M$, isto é, $\bar{y} = \bar{0}$.

Assim, pela Afirmção juntamente com a Proposição 1.4.11 e o Teorema 1.5.7, segue que

$$\dim S/\bar{x}S = \dim S - 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{S}{\bar{x}S} = \frac{R/\text{ann}M}{(x + \text{ann}M/\text{ann}M)} \cong \frac{R}{(x) + \text{ann}M}$$

que implica

$$\dim(M/xM) = \dim(R/\text{ann}M/xM) \leq \dim S - 1 = \dim M - 1$$

donde segue a igualdade do enunciado. \square

A próximo corolário pode ser considerado como uma motivação para a definição de anéis e módulos Cohen-Macaulay, que serão estudados na Seção 2.4.

Corolário 2.2.19. *Seja $M \neq 0$ um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Então, toda M -sequência faz parte de um sistema de parâmetros de M . Em especial, $\text{depth } M \leq \dim M$.*

Demonstração. Se $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência, pelo Teorema 2.2.18, $\dim(M/\mathbf{x}M) = \dim M - n$ e pela Proposição 2.2.18, a sequência \mathbf{x} faz parte de um sistema de parâmetros. Assim, a última afirmação segue do Teorema 1.5.7. \square

Corolário 2.2.20. *Sejam R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Então, $\text{grade } I \leq \text{ht } I$.*

Demonstração. Uma vez que $\text{ht } I = \inf\{\dim R_P : P \in V(I)\}$ e pelo item (a) da Proposição 2.2.14,

$$\text{grade } I = \inf\{\text{depth } R_P : P \in V(I)\},$$

o resultado segue do Corolário 2.2.19. \square

A desigualdade descrita no Corolário 2.2.19, pode ser refinada olhando para as dimensões providas dos primos associados.

Proposição 2.2.21. *Seja $M \neq 0$ um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) . Então, $\text{depth } M \leq \dim R/P$, para qualquer $P \in \text{Ass } M$.*

Demonstração. Faremos a prova utilizando indução em $\text{depth } M$. Se $\text{depth } M = 0$, a proposição é verdadeira. Assuma então que $\text{depth } M > 0$. Assim, existe $x \in \mathfrak{m}$ que é elemento M -regular. Seja $P \in \text{Ass } M$ e considere

$$\mathcal{S} = \{\text{submódulos cíclicos de } M \text{ que são anulados por } P\}.$$

Note que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pois o submódulo nulo está em \mathcal{S} . Como M é Noetheriano, então existe $m \in M$, tal que o submódulo Rm é maximal em \mathcal{S} .

Afirmção: P consiste de divisores de zero de M/xM .

Suponha que exista $y \in P$ elemento M/xM -regular. Como $Pm = 0$, em particular, $ym = 0$, o que implica $y\bar{m} = \bar{0}$, ou seja, $m \in xM$, pois y é M/xM -regular. Então, escreva $m = xm'$, para algum $m' \in M$. Como x é M -regular então $Pm' = 0$. Além disso, Rm é um submódulo próprio de Rm' . Com efeito, se $Rm = Rm'$, então existe $r \in R$, tal que $m' = rm$. Daí, $m = xrm$ ou, $(xr - 1)m = 0$. Se $xr - 1$, é invertível, então $m = 0$, uma contradição. Se $xr - 1$ não é invertível, então $xr - 1 \in \mathfrak{m}$, e assim, $-1 \in \mathfrak{m}$ gerando outra contradição. Então de fato $Rm \subsetneq Rm'$. Por outro lado, isto contradiz a maximalidade do módulo Rm em \mathcal{S} , provando a afirmação.

Pela Proposição 2.2.3, existe $Q \in \text{Ass } M/xM$ tal que $P \subseteq Q$. Como x é M -regular, então $x \notin P$, implicando que $M_P = xM_P$. Isto equivale a $(M/xM)_P = 0$ e assim $P \notin \text{Supp}(M/xM)$. Portanto, $P \subsetneq Q$, e por 2.2.14, juntamente com a hipótese de indução

$$\dim R/P > \dim R/Q \geq \text{depth}(M/xM) = \text{depth } M - 1.$$

Donde, $\text{depth } M \leq \dim R/P$. \square

2.3 A Fórmula de Auslander-Buchsbaum

Temos a noção de minimalidade de complexos de módulos sobre anéis locais, e em especial de resoluções projetivas.

Definição 2.3.1. Um complexo de módulos

$$\mathcal{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

sobre um anel local (R, \mathfrak{m}, k) é dito ser *minimal* se, os mapas do complexo $\mathcal{F} \otimes k$ são todos nulos.

Observação 2.3.2. Um complexo

$$\mathcal{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow 0$$

é minimal se, e só se, $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, para todo i . Com efeito, se \mathcal{F}_\bullet é minimal, então para todo i , a aplicação $\varphi_i \otimes id : F_i \otimes R/\mathfrak{m} \longrightarrow F_{i-1} \otimes R/\mathfrak{m}$ é nula. Dessa forma, se $\varphi(a) \in \varphi_i(F_i)$, temos que $\varphi_i(a) \otimes \bar{1} = 0$ em $F_{i-1} \otimes R/\mathfrak{m} \cong F_{i-1}/\mathfrak{m}F_{i-1}$. Assim, $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$. Por outro lado, se $a \otimes \bar{x} \in F_i \otimes R/\mathfrak{m}$ temos, $(\varphi_i \otimes id)(a \otimes \bar{x}) = \varphi_i(a) \otimes \bar{x}$. Como $\varphi_i(a) \in \varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, podemos escrever $\varphi_i(a) = m_1 f_1 + \cdots + m_k f_k$, para $m_j \in \mathfrak{m}$, $f_j \in F_{i-1}$, e $j = 1, \dots, k$. Logo, $\varphi_i(a) \otimes \bar{x} = f_1 \otimes m_1 \bar{x} + \cdots + f_k \otimes m_k \bar{x} = f_1 \otimes 0 + \cdots + f_k \otimes 0 = 0$. Donde, o complexo \mathcal{F}_\bullet é minimal.

É mostrado que a dimensão projetiva de um módulo M é o comprimento de uma resolução projetiva minimal de M (veja Definição 6.2.5).

Exemplo 2.3.3. Seja $R = k[[x]]/(x^2)$, sendo k um corpo. Defina a aplicação $h : R \longrightarrow R$ por $h(\bar{f}) = \bar{f}\bar{x}$. Temos que $\text{Im}(h) = \ker(h) = (\bar{x})$. Dessa forma, a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{h} R \xrightarrow{h} R \longrightarrow \cdots \xrightarrow{h} R \xrightarrow{h} R \xrightarrow{\pi} R/(\bar{x}) \longrightarrow 0$$

onde $\pi : R \longrightarrow R/(\bar{x})$ é a projeção canônica, é uma resolução projetiva minimal de $R/(\bar{x}) \cong k$ como R -módulo. Portanto, $\text{pd}_R(k) = \infty$.

Considere M um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}, k) . Podemos construir uma resolução livre minimal da seguinte forma: Como consequência do Lema de Nakayama, sabemos que $x_1, \dots, x_n \in M$ formam um sistema minimal de geradores se, e só se, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in M/\mathfrak{m}M \cong M \otimes k$ formam uma k -base de $M \otimes k$. Por isso, $\mu(M) = \dim_k(M \otimes k)$ é o *número minimal de geradores de M* . Sendo $\beta_0 = \mu(M)$, escolhamos x_1, \dots, x_{β_0} um conjunto minimal de geradores e definamos o morfismo sobrejetor, $\varphi_0 : R^{\beta_0} \longrightarrow M$ por $e_i \mapsto x_i$, onde e_1, \dots, e_{β_0} é a base canônica de R^{β_0} . Fazendo $\beta_1 = \mu(\ker \varphi_0)$ definimos de forma análoga $\varphi_1 : R^{\beta_1} \longrightarrow \ker \varphi_0$. Caminhando nessa direção construímos uma resolução livre minimal

$$\mathcal{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow R^{\beta_n} \xrightarrow{\varphi_n} R^{\beta_{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{\beta_1} \xrightarrow{\varphi_1} R^{\beta_0} \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

A resolução acima é determinada por M a menos de isomorfismos de complexos. Para cada i , o número $\beta_i(M) = \beta_i$ é chamado *i -ésimo número de Betti de M* .

Proposição 2.3.4. Sejam (R, \mathfrak{m}, k) um anel local Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e

$$\mathcal{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de M . As seguintes condições são equivalentes:

- (a) \mathcal{F}_\bullet é minimal;
- (b) $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, para todo $i \geq 1$;
- (c) $\text{rank}(F_i) = \dim_k \text{Tor}_i^R(M, k)$, para todo $i \geq 1$;

(d) $\text{rank}(F_i) = \dim_k \text{Ext}_R^i(M, k)$, para todo $i \geq 1$.

Demonstração. A equivalência entre (a) e (b) foi feita na Observação 2.3.2. Uma vez que o funtor torção $\text{Tor}_i^R(M, k)$ é a i -ésima homologia do complexo $\mathcal{F}_\bullet \otimes k$, então para cada i , $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ se, e só se, $\varphi_i(F_i) \otimes k = 0$ se, e só se, $\text{rank}(F_i) = \dim_k \text{Tor}_i^R(M, k)$. Dessa forma, temos (b) equivalente a (c). A equivalência entre (b) e (c), segue analogamente a anterior, dado que $\text{Ext}_R^i(M, k)$ é a i -ésima cohomologia do complexo $\text{Hom}_R(\mathcal{F}_\bullet, k)$. \square

Como consequência imediata da proposição anterior podemos calcular a dimensão projetiva a partir dos funtores torção.

Corolário 2.3.5. *Seja (R, \mathfrak{m}, k) um anel local Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Então para todo i , $\beta_i = \dim_k \text{Tor}_i^R(M, k)$ e*

$$\text{pd}_R(M) = \sup\{i : \text{Tor}_i^R(M, k) \neq 0\}.$$

Demonstração. Considerando

$$\mathcal{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow R^{\beta_n} \xrightarrow{\varphi_n} R^{\beta_{n-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^{\beta_1} \xrightarrow{\varphi_1} R^{\beta_0} \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre minimal para M , temos por definição

$$\text{pd}_R(M) = \sup\{i : \beta_i \neq 0\}$$

e o resultado segue da Proposição 2.3.4. \square

Para provar o teorema de Auslander-Buchsbaum, precisamos apenas de mais um resultado técnico.

Proposição 2.3.6. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Se $x \in \mathfrak{m}$ é R -regular e M -regular, então $\text{pd}_R(M) = \text{pd}_{R/(x)}(M/xM)$.*

Demonstração. Considere \mathcal{F}_\bullet uma resolução livre minimal de M . Como x é R -regular e M -regular, o complexo $\mathcal{F}_\bullet \otimes R/(x)$ é exato, e portanto é uma resolução livre minimal de M/xM sobre $R/(x)$. Por outro lado, nessas condições temos que para cada i , $\text{Tor}_i^{R/(x)}(M/xM, k) = \text{Tor}_i^R(M, k)$. Assim, pelo Corolário 2.3.5,

$$\text{pd}_{R/(x)}(M/xM) = \sup\{i : \text{Tor}_i^{R/(x)}(M/xM, k) \neq 0\} = \sup\{i : \text{Tor}_i^R(M, k) \neq 0\} = \text{pd}_R(M).$$

\square

Sem mais delongas, eis a fórmula de Auslander-Buchsbaum.

Teorema 2.3.7 (Auslander-Buchsbaum). *Sejam (R, \mathfrak{m}, k) um anel local Noetheriano e M um R -módulo não-nulo finitamente gerado. Se $\text{pd}_R(M) < \infty$, então*

$$\text{pd}_R(M) + \text{depth } M = \text{depth } R.$$

Demonstração. Argumentaremos por indução sobre $\text{depth}(R)$. Considere

$$\mathcal{F}_\bullet : 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre minimal de M , daí $\text{pd}_R(M) = n$. Suponha $\text{depth } R = 0$, em particular $\text{depth } M = 0$. Daí, pelo Exemplo 2.2.13, $\mathfrak{m} \in \text{Ass } R$ e existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow R \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Esta sequência induz uma sequência exata longa, de onde obtemos

$$\text{Tor}_{n+1}^R(M, C) \cong \text{Tor}_n^R(M, k) \neq 0$$

uma vez que para todo $i \geq n$, tem-se $\text{Tor}_i^R(M, k) = 0$. Isto é uma contradição, a menos que $n = 0$, pois $\text{Tor}_{n+1}^R(M, -)$ se anula acima de n . Daí, $\text{Tor}_1^R(M, k) = 0$ implicando que M é plano pela Proposição 6.2.10, e assim M é livre pela Proposição 6.2.13. Neste caso, a fórmula é verdadeira. Suponha agora, $\text{depth } R > 0$. Se $\text{depth } M > 0$, então $\mathfrak{m} \notin \text{Ass}(R)$ e $\mathfrak{m} \notin \text{Ass}(M)$ (Exemplo 2.2.13). Escolha x elemento R -regular e M -regular. Pela Proposição 2.2.14, $\text{depth}_{R/(x)}(R/(x)) = \text{depth}_R(R) - 1$, $\text{depth}_{R/(x)}(M/xM) = \text{depth}_R(M) - 1$. Além disso, a Proposição 2.3.6 nos diz que $\text{pd}_{R/(x)}(M/xM) = \text{pd}_R(M)$. Por hipótese de indução,

$$\text{pd}_{R/(x)}(M/xM) + \text{depth}_{R/(x)}(M/xM) = \text{depth}_{R/(x)}(R/(x))$$

e em consequência, $\text{pd}_R(M) + \text{depth}_R(M) = \text{depth}_R(R)$. Falta mostrar o caso $\text{depth } M = 0$. Para tal, considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^t \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Dessa forma, $\text{depth } K \geq \min\{\text{depth } R^t, \text{depth } M + 1\} = 1$. Por outro lado,

$$0 = \text{depth } M \geq \min\{\text{depth } K - 1, \text{depth } R^t\} = \text{depth } K - 1$$

o que implica que $\text{depth } K \leq 1$, isto é, $\text{depth } K = 1$. Além disso, $\text{pd}_R(K) = \text{pd}_R(M) - 1$. Uma vez que $\text{depth } K > 0$, pelo caso anterior $\text{pd}_R(K) + \text{depth } K = \text{depth } R$, logo

$$\text{pd}_R(M) + \text{depth } M = \text{pd}_R(M) - 1 + 1 = \text{depth } R.$$

□

Exemplo 2.3.8. A profundidade de módulos livres coincide com a profundidade de seu anel base: se F é R -módulo livre (R anel local), em particular F é projetivo. Logo, $\text{pd}_R(F) = 0$ e $\text{depth } F = \text{depth } R$, pelo Teorema 2.3.7.

Exemplo 2.3.9. Dado qualquer $i \in \mathbb{N}$ podemos fabricar anéis com dimensão projetiva igual a i : seja k um corpo, e $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$ o anel de séries formais com n indeterminadas. Como

$$R/(x_1, \dots, x_i) \cong k[[x_{i+1}, \dots, x_n]]$$

pelo Teorema 2.3.7,

$$\text{pd}_R(R/((x_1, \dots, x_i))) + n - i = n$$

pois $\text{depth } R = n$ e $\text{depth } k[[x_{i+1}, \dots, x_n]] = n - i$. Donde, $\text{pd}_R(R/((x_1, \dots, x_i))) = i$.

Como o lema de Nakayama, a fórmula de Auslander-Buchsbaum tem uma versão graduada, cuja prova é baseada na prova do caso local, utilizando o lema de Nakayama Homogêneo (Lema 1.1.12). Finalizamos esta seção enunciando esta versão.

Teorema 2.3.10 (Auslander-Buchsbaum Homogêneo). *Sejam $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado, finitamente gerado como álgebra sobre o corpo R_0 e $\mathfrak{m} = \bigoplus_{n > 0} R_n$ o ideal maximal homogêneo. Se M é um R -módulo graduado finitamente gerado com dimensão projetiva finita, então*

$$\mathrm{pd}_R(M) + \mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M) = \mathrm{grade}(\mathfrak{m}, R).$$

2.4 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

No Corolário 2.2.19 vimos que a profundidade de um módulo é sempre menor ou igual a sua dimensão. Os casos especiais em que ocorrem a igualdade merecem destaque.

Definição 2.4.1. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano. Um R -módulo finitamente gerado $M \neq 0$ é dito ser *Cohen-Macaulay* se $\mathrm{depth} M = \dim M$. Se R é um R -módulo Cohen-Macaulay, o chamamos de *anel Cohen-Macaulay*. No caso geral, em que R é Noetheriano não necessariamente local, então M é módulo Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{m}}$ é $R_{\mathfrak{m}}$ -módulo Cohen-Macaulay, para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}(M)$. Convencionamos que o módulo nulo venha a ser módulo Cohen-Macaulay.

Exemplo 2.4.2. Todo anel Artiniano é Cohen-Macaulay. Com efeito, como localização de anéis Artinianos resulta em anéis Artinianos, basta provarmos o caso local. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Artiniano e $a \in R$ elemento não-invertível, isto é, $a \in \mathfrak{m}$. Como R é Artiniano, existe $k \geq 1$, tal que $a^k \in \mathfrak{m}^k = (0)$, logo a é divisor de zero. Onde, $\dim R = \mathrm{depth} R = 0$.

Exemplo 2.4.3. Todo domínio Noetheriano de dimensão 1 é Cohen-Macaulay. Para tal, note que para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in R$, $\dim R_{\mathfrak{m}} = 1$, pois temos a cadeia maximal de primos $(0) \subseteq \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$, e assim, qualquer elemento não-nulo e não-invertível serve para ser uma $R_{\mathfrak{m}}$ -sequência maximal.

Proposição 2.4.4. *Sejam (R, \mathfrak{m}) anel local Noetheriano e M um R -módulo não-nulo Cohen-Macaulay. Então:*

- (a) $\dim R/P = \mathrm{depth} M$, para todo $P \in \mathrm{Ass} M$;
- (b) $\mathrm{grade}(I, M) = \dim M - \dim M/IM$, para qualquer ideal $I \subseteq \mathfrak{m}$;
- (c) $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é M -sequência se, e só se, $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - n$.

Demonstração. (a) O fato de que $\mathrm{Ass} M \subseteq \mathrm{Supp}(M)$ e a Proposição 2.2.21 implicam que, se $P \in \mathrm{Ass} M$ então

$$\mathrm{depth} M \leq \dim R/P \leq \dim M = \mathrm{depth} M.$$

(b) Observe que por (a), qualquer primo P em $\mathrm{Ass} M$ é minimal, logo minimal também em $\mathrm{Supp}(M)$. Então se $\mathrm{grade}(I, M) = 0$, pela Proposição 2.2.3 existe $P \in \mathrm{Ass} M$, com $I \subseteq P$. Uma vez que $\mathrm{Supp}(M/IM) = \mathrm{Supp}(M) \cap V(I)$, então P também é minimal em $\mathrm{Supp}(M/IM)$.

Logo, $\dim M/IM = \dim R/P = \dim M$. Então, assumamos $\text{grade}(I, M) > 0$ e escolha $x \in I$ elemento M -regular. Pela Proposição 2.2.14, $\text{grade}(I, M/xM) = \text{grade}(I, M) - 1$, $\text{depth } M/xM = \text{depth } M - 1$ e pelo Teorema 2.2.18, $\dim M - 1 = \dim M/xM$. Como M é Cohen-Macaulay, as equações acima certificam que M/xM também o é. Dessa maneira podemos utilizar indução em $\text{grade}(I, M)$ para obter

$$\begin{aligned} \text{grade}(I, M) - 1 &= \text{grade}(I, M/xM) \\ &= \dim M/xM - \dim M/IM \\ &= \dim M - 1 - \dim M/IM. \end{aligned}$$

Logo, $\text{grade}(I, M) = \dim M - \dim M/IM$.

(c) É suficiente mostrar a seguinte:

Afirmção: $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é M -sequência se, e somente se, $\text{grade}(I, M) = n$.

Com efeito, teríamos $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é M -sequência se, e só se, $\text{grade}(I, M) = n$, e por (b) isto é equivalente a $n = \text{grade}(\mathbf{x}, M) = \dim M - \dim M/\mathbf{x}M$, ou seja, $\dim M/\mathbf{x}M = \dim M - n$. Provemos então a afirmação: se \mathbf{x} é M -sequência, é fato que \mathbf{x} é M -sequência maximal em $I = (\mathbf{x})$, pois dado qualquer $x_{n+1} \in I$, por definição este seria combinação linear de x_1, \dots, x_n e dessa forma, x_{n+1} seria divisor de zero em $M/\mathbf{x}M$. Reciprocamente, por indução, basta supor que $\mathbf{x} = x_1$. Daí, $\text{grade}(x_1, M) = 1$, então existe elemento M -regular $y_1 \in (x_1)$, ou seja, $y_1 = x_1 z$, para algum $z \in R$. Assim, se $x_1 m = 0$, então $(x_1 z)m = 0$, isto é, $y_1 m = 0$, donde $m = 0$, pois y_1 é M -regular. Mostramos assim que x_1 é M -regular, como queríamos. \square

Pelo Teorema 1.5.7, podemos reformular o item (c) da proposição anterior no seguinte

Corolário 2.4.5. *Sejam (R, \mathfrak{m}) anel local Noetheriano e M um R -módulo não-nulo. Então, \mathbf{x} é uma M -sequência se, e somente se, esta faz parte de um sistema minimal de parâmetros de M .*

Exemplo 2.4.6. Seja k um corpo. Então, o subanel $S = k[[x^4, x^3y, xy^3, y^4]] \subseteq k[[x, y]]$ não é Cohen-Macaulay. Primeiro, observe que $\{x^4, y^4\}$ é sistema de parâmetros, pois $(x^3y)^4 = x^{12}y^4$ e $(xy^3)^4 = x^4y^{12}$, isto mostra que $\sqrt{(x^4, y^4)} = (x^4, x^3y, xy^3, y^4)$, que é o ideal maximal de S . Assim, $\delta(M) \leq 2$. Mais ainda, temos a seguinte cadeia de primos em S

$$(0) \subseteq (x^4) \subseteq (x^4, x^3y, xy^3, y^4).$$

Daí, pelo Teorema 1.5.7 $\dim M = \delta(M) \geq 2$. Logo, $\delta(M) = 2$ e $\{x^4, y^4\}$ é um minimal sistema de parâmetros. Por outro lado, y^4 é divisor de zero em $S/(x^4)$, porque $y^4(x^6y^2) = x^6y^6 = x^4(x^2y^6) \in (x^2)$, mas $x^6y^2 \notin (x^4)$, pois $x^6y^2 = x^4(x^2y^2)$ e $x^2y^2 \notin S$. Desta forma, encontramos um sistema minimal de parâmetros que não é uma sequência regular em S , logo pelo corolário acima, S não pode ser Cohen-Macaulay.

O próximo teorema nos mostra que a propriedade de Cohen-Macaulay é preservada por passagens a quocientes por sequências regulares e por localizações.

Teorema 2.4.7. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ uma M -sequência.*

- (a) Se M é módulo Cohen-Macaulay, então $M/\mathfrak{x}M$ é módulo Cohen-Macaulay (sobre R ou $R/(\mathfrak{x})$). Vale a recíproca se R é local.
- (b) Se M é módulo Cohen-Macaulay, então para qualquer subconjunto multiplicativo $S \subseteq R$, a localização $S^{-1}M$ é $S^{-1}R$ -módulo Cohen-Macaulay. Se $P \in \text{Spec}(R)$ e $M \neq 0$, então $\text{depth } M_P = \text{grade}(P, M)$. Mais ainda, se R é local, então $\dim M = \dim M_P + \dim M/PM$.

Demonstração. (a) Pela definição de módulos Cohen-Macaulay, não há perda alguma supor que R é anel local. Pelo item (c) da Proposição 2.4.4, $\dim M/\mathfrak{x}M = \dim M - n$ e pela Proposição 2.2.14, $\text{depth } M/\mathfrak{x}M = \text{depth } M - n$. Como M é Cohen-Macaulay, então $\dim M/\mathfrak{x}M = \text{depth } M/\mathfrak{x}M$.

(b) Seja Q um ideal maximal em $S^{-1}R$, então $Q = S^{-1}P$, para algum $P \in \text{Spec}(R)$ e $P \cap S = \emptyset$. Dessa forma, $S^{-1}R_Q \cong R_P$. Seja \mathfrak{m} , um ideal maximal de R contendo P . Então, R_P é uma localização do anel Cohen-Macaulay $R_{\mathfrak{m}}$, e assim podemos novamente assumir que R é local. Como o módulo nulo é Cohen-Macaulay, assuma que $M_P \neq 0$. Utilizaremos indução sobre $\text{depth } M_P$. Se $\text{depth } M_P = 0$, então PR_P consiste de divisores de zero em M_P , logo pela Proposição 2.2.3, existe $Q \in \text{Ass } M$ tal que $Q \subseteq P$ e $PR_P \subseteq QR_P$, ou seja, $Q = P$ e $P \in \text{Ass } M$. Daí, pelo item (a) da Proposição 2.4.4, P é primo minimal em $\text{Supp}(M)$ (ou em $\text{Ass } M$). Portanto, $\dim M_P = 0$. Utilizando o mesmo argumento, P não pode estar em nenhum $Q \in \text{Ass } M$, se $\text{depth } M_P > 0$. Assim, P contém um elemento M -regular x . Pelo Corolário 2.1.10, x também é M_P -regular. Então a Proposição 2.2.14 e a hipótese de indução nos dizem que

$$\dim M_P - 1 = \dim M_P/xM_P = \text{depth } M_P/xM_P = \text{depth } M_P - 1$$

Donde $\dim M_P = \text{depth } M_P$ e M_P é Cohen-Macaulay. Com isso, novamente pela Proposição 2.2.14,

$$\text{grade}(P, M) = \inf\{\text{depth } M_Q : Q \in V(P)\} = \inf\{\dim M_Q : Q \in V(P)\} = \dim M_P$$

e assim $\text{grade}(P, M) = \text{depth } M_P$. Por fim, utilizando mais uma vez a Proposição 2.4.4 e a igualdade acima, tem-se

$$\dim M - \dim M/PM = \text{grade}(P, M) = \text{depth } M_P = \dim M_P$$

ou seja, $\dim M = \dim M_P + \dim M/PM$. □

Como consequência podemos relacionar a propriedade de Cohen-Macaulay de anéis com alturas de ideais.

Corolário 2.4.8. *Seja R um anel Cohen-Macaulay, e $I \neq R$ um ideal. Então, $\text{grade } I = \text{ht } I$, e se R é local, $\text{ht } I + \dim R/I = \dim R$.*

Demonstração. Uma vez que $\text{ht } I = \min\{\dim R_P : P \in V(I)\}$, e pela Proposição 2.2.14, $\text{grade } I = \min\{\text{depth } R_P : P \in V(I)\}$ o teorema anterior assegura que $\text{grade } I = \text{ht } I$. Dessa maneira, fazendo uso da Proposição 2.4.4, temos que

$$\text{ht } I = \text{grade } I = \dim R - \dim R/I$$

que é equivalente a equação desejada. □

2.5 Anéis Regulares

Definição 2.5.1. Um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) é dito ser *regular*, se este possui um sistema de parâmetros minimal gerando \mathfrak{m} . Chamamos este sistema de *sistema regular de parâmetros*. Se R é anel Noetheriano qualquer, R é dito ser regular, se $R_{\mathfrak{m}}$ é regular, para qualquer ideal maximal $\mathfrak{m} \in R$.

Exemplo 2.5.2. Considere (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano de dimensão 0. Então R é regular se, e só se, $\mathfrak{m} = (0)$ se, e só se, R é um corpo. Veremos mais a frente que todo anel regular é Cohen-Macaulay, mas claramente nem todo anel Cohen-Macaulay é regular, pois basta tomar qualquer anel Artiniano (Exemplo 2.4.2) que não é corpo, por exemplo, $R = \mathbb{Z}_4$.

Exemplo 2.5.3. Seja $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$ o anel de séries formais sobre um corpo k . Sabemos que $\dim R = n$, e também $\{x_1, \dots, x_n\}$ é um sistema regular de parâmetros, logo R é anel regular. É possível mostrar o seguinte resultado mais geral: um anel R é regular, se, e somente se, $R[[x_1, \dots, x_n]]$ é regular, e o mesmo vale para R e $R[x_1, \dots, x_n]$. Dessa maneira, o caso acima é apenas um caso particular deste resultado.

Uma caracterização para anéis locais regulares bastante utilizada é a seguinte

Proposição 2.5.4. *Seja (R, \mathfrak{m}, k) anel local Noetheriano. São equivalentes:*

- (a) R é regular;
- (b) $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$.

Demonstração. Denote $\dim R = d$. Pelo lema de Nakayama, sabemos que $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Se x_1, \dots, x_d geram \mathfrak{m} , então $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$ geram $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, e assim

$$\dim R = d \geq \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

Sendo R anel regular, como qualquer conjunto gerador de \mathfrak{m} é um sistema de parâmetros, temos

$$\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq \delta(R) = \dim R$$

pelo Teorema 1.5.7. Reciprocamente, se $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$ é uma k -base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, novamente pelo lema de Nakayama, x_1, \dots, x_d geram \mathfrak{m} e portanto R é regular. \square

Exemplo 2.5.5. Considere k um corpo cuja característica não é 2 nem 3, $R = k[x, y]/(x^3 - y^2)$ e $\mathfrak{m} = (\bar{x} - 1, \bar{y} - 1)$. O anel localizado $R_{\mathfrak{m}}$ é regular. Primeiro, R é domínio e pelo Teorema 2.2.18, $\dim R = \dim k[x, y] - 1 = 1$, e também $\dim R_{\mathfrak{m}} = 1$. Por outro lado, afirmamos que $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ é um ideal principal. De fato, $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} = (\bar{x}^3 - 1)$, isso pois

$$(\bar{x}^2 + \bar{x} + 1)(\bar{x} - 1) = \bar{x}^3 - 1 = \bar{y}^2 - 1 = (\bar{y} - 1)(\bar{y} + 1).$$

Dessa forma, $\dim R_{\mathfrak{m}} = \mu(\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}) = 1$, e $R_{\mathfrak{m}}$ é anel regular, pela proposição anterior.

Exemplo 2.5.6. Sejam $R = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 5^3)$ e $\mathfrak{m} = (\bar{5}, \bar{x})$. $R_{\mathfrak{m}}$ não é regular. Primeiro, note que o corpo residual de $R_{\mathfrak{m}}$ é naturalmente isomorfo a \mathbb{Z}_5 . A cadeia de primos $(0) \subsetneq (\bar{5}, \bar{x})$ nos diz que $\dim R_{\mathfrak{m}} \geq 1$. Mas, como $\bar{x} \in \sqrt{(\bar{5})}$, temos que $\{\bar{5}\}$ é um sistema de parâmetros, ou seja, $\delta(R_{\mathfrak{m}}) \leq 1$. Donde pelo Teorema 1.5.7, $\dim R_{\mathfrak{m}} = \delta(R_{\mathfrak{m}}) = 1$. Porém, temos a série de isomorfismos de \mathbb{Z}_5 -espaços vetoriais,

$$\frac{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}})^2} \cong \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = \frac{(\bar{5}, \bar{x})}{(\bar{5}^2, \bar{5}\bar{x}, \bar{x}^2)} \cong \frac{(5, x)}{(5^2, 5x, x^2) + (x^2 - 5^3)} = \frac{(5, x)}{(5^2, 5x, x^2)}.$$

Estes possuem dimensão 2, e assim $\mu(\mathfrak{m}) = 2$. Dessa maneira, $R_{\mathfrak{m}}$ não é regular.

Um fato surpreendente é que anéis locais regulares são sempre domínios de integridade.

Proposição 2.5.7. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local regular. Então, R é um domínio de integridade.*

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre $\dim R$. Se $\dim R = 0$, pelo Exemplo 2.5.2, R é um corpo. Então, suponha $\dim R > 0$, e sejam P_1, \dots, P_m , os ideais primos minimais de R (por hipótese R é anel Noetheriano). Pelo lema da esquiua, existe $x \in \mathfrak{m}$, tal que x não pertence a nenhum dos ideais $\mathfrak{m}^2, P_1, \dots, P_m$. Uma vez que x faz parte de um sistema minimal de geradores de \mathfrak{m} , então este faz parte de um sistema regular de parâmetros, donde $R/(x)$ é regular. Como $\dim R/(x) = \dim R - 1$, a hipótese de indução implica que $R/(x)$ é domínio, e assim, o ideal (x) é primo. Dessa forma, (x) contém algum primo minimal de R , ou seja, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que, $P_j \subseteq (x)$. Para qualquer $y \in P_j$, $y = xz$, para algum $z \in R$. Como $x \notin P_j$, então $z \in P_j$. Logo, $P_j = xP_j$ e pelo lema de Nakayama, $P_j = (0)$. Portanto, $R \cong R/(0)$ é um domínio. \square

O próximo resultado nos proporciona um critério para decidir quando quocientes de anéis regulares ainda são regulares.

Proposição 2.5.8. *Sejam (R, \mathfrak{m}, k) um anel local regular e $I \subseteq R$ um ideal. Então, R/I é regular se, e somente se, I é gerado por um subconjunto de um sistema regular de parâmetros.*

Demonstração. Considere $I = (x_1, \dots, x_l)$ e $S = \{x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n\}$ um sistema minimal de geradores de \mathfrak{m} . Claramente, $\mu(R/I) = \mu(R) - l$, uma vez que $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l$ serão todos nulos em R/I . Em contrapartida, afirmamos que x_1, \dots, x_l é uma R -sequência. Com efeito, primeiramente x_1 não é divisor de zero em R , pois R é domínio (Proposição 2.5.7). Além disso, para cada $i = 1, \dots, l$, x_i não é divisor de zero em $R/(x_1, \dots, x_{i-1})$, pois caso contrário, $n = \mu(\mathfrak{m})$ não seria mínimo. Daí, por hipótese e o Teorema 2.2.18,

$$\dim R/I = \dim R - l = \mu(\mathfrak{m}) - l = \mu(\mathfrak{m}/I)$$

e assim por 2.5.4, R/I é regular. Reciprocamente, pela Proposição 2.5.4 devemos mostrar que se R/I é regular, existem $x_1, \dots, x_m \in I$, tais que $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ são linearmente independentes sobre k em $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, onde $m = \dim R - \dim R/I$ e $I = (x_1, \dots, x_m)$. Para isso, tensorizando por $k = R/\mathfrak{m}$ a sequência exata

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{m} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{m}/I \longrightarrow 0$$

conseguimos a sequência exata

$$I/\mathfrak{m}I \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\bar{\psi}} (\mathfrak{m}/I)/(\mathfrak{m}/I)^2 \longrightarrow 0.$$

Por hipótese temos que $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$ e $\dim_k (\mathfrak{m}/I)/(\mathfrak{m}/I)^2 = \dim R/I$. Dessa forma, pelo teorema do núcleo e da imagem, $\dim_k \ker \bar{\psi} + \dim_k \operatorname{Im} \bar{\psi} = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Assim,

$$\dim_k \bar{\varphi}(I/\mathfrak{m}I) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 - \dim_k (\mathfrak{m}/I)/(\mathfrak{m}/I)^2 = \dim R - \dim R/I = m.$$

Podemos então escolher, em $\bar{\varphi}(I/\mathfrak{m}I)$, um k -base $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$, com $x_1, \dots, x_m \in I$. Afirmamos, que $\{x_1, \dots, x_m\}$ gera I . De fato, ponha $I' = (x_1, \dots, x_m)$ e $R' = R/I'$. Pelo que já foi provado nesta proposição, R' é regular, em particular R' é um domínio (Proposição 2.5.7) e ainda, $\dim R' = \dim R - m = \dim R/I$. Como, $I' \subseteq I$, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow I/I' \longrightarrow R' \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Se $I/I' \neq 0$, estaríamos dizendo que R/I seria um quociente próprio de R' , e portanto teria dimensão menor, uma contradição. Nos resta que $I/I' = 0$, como queríamos. \square

O próximo teorema nos revela mais uma importante caracterização de anéis regulares.

Teorema 2.5.9. *Seja (R, \mathfrak{m}, k) local Noetheriano e x_1, \dots, x_n um sistema minimal de geradores de \mathfrak{m} . As afirmação abaixo são equivalentes:*

- (a) R é regular;
- (b) x_1, \dots, x_n é uma R -sequência;
- (c) A substituição $X_i \mapsto \bar{x}_i \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, induz um isomorfismo $k[X_1, \dots, X_n] \cong \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$.

Demonstração. A implicação de (a) para (b) já foi feita na demonstração da proposição anterior. De (b) para (a), basta relembrar (Corolário 2.2.19) que toda R -sequência faz parte de um sistema de parâmetros. A implicação de (b) para (c) é o Teorema 2.1.14. Sabemos que a sequência X_1, \dots, X_n é regular em $k[X_1, \dots, X_n]$. Assim, a sequência $x_1 + \mathfrak{m}^2, \dots, x_n + \mathfrak{m}^2$ é regular em $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$. Logo, x_1, \dots, x_n é R -sequência pela Proposição 2.1.16. \square

Como consequência da caracterização anterior, provaremos então o que foi prometido no Exemplo 2.5.2.

Corolário 2.5.10. *Todo anel local regular é Cohen-Macaulay.*

Demonstração. Com a mesma notação do Teorema 2.5.9, x_1, \dots, x_n é R -sequência. Além disso, o Teorema 2.2.18 nos diz que

$$0 = \dim k = \dim R/\mathfrak{m} = \dim R - n$$

isto é, $\dim R = n$. Logo, $\dim R \leq \operatorname{depth} R$. Mas, a desigualdade contrária é sempre verdadeira pelo Corolário 2.2.19. Sendo assim, segue a igualdade. \square

Capítulo 3

Os Números Graduados de Betti

Resoluções livres são maneiras mais simples de descrever um módulo por suas sizíguas, isto é, através de seus geradores e suas relações. Os graus dos geradores controlam os “shifts” da resolução e os postos dos módulos livres são os tais números de Betti, que acabam nos revelando muitas informações sobre o módulo em questão. Inclusive, no Capítulo 5 definiremos a regularidade de Castelnuovo-Mumford através dessa maneira de enxergar o módulo. A priori, mostraremos como os números de Betti são utilizados no cálculo da função de Hilbert. Depois, veremos uma belíssima maneira de calcular resoluções livres de ideais monomiais utilizando a teoria de complexos simpliciais, exibindo um critério para decidir se tal resolução é minimal. E por fim, utilizando potências exteriores provaremos o Teorema das Sizíguas de Hilbert.

3.1 Números de Betti e Função de Hilbert

Seja $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$, um S -módulo finitamente gerado, onde $S = k[x_0, \dots, x_r]$ é o anel de polinômios em $r + 1$ indeterminadas sobre um corpo k . Relembre da Definição 1.3.7 que a função de Hilbert de M é dada por

$$h(M, d) = \ell_k(M_d) = \dim_k M_d.$$

Podemos calcular $h(M, d)$ utilizando resoluções livres de M . Note que $S(-a)$ é um S -módulo de posto 1 gerado por um elemento de grau a . Dessa maneira, dados elementos homogêneos $m_i \in M$ de graus a_i gerando M como S -módulo, podemos definir um morfismo graduado do S -módulo livre graduado $F_0 = \bigoplus_i S(-a_i)$ em M , enviando o i -ésimo gerador em m_i . Defina $M_1 \subseteq F_0$, o kernel desse morfismo. Pelo teorema das bases de Hilbert, M_1 também é finitamente gerado. Os elementos de M_1 são chamados de *sizíguas dos geradores* m_i , ou simplesmente *sizíguas de* M . Como antes, tomando finitas sizíguas homogêneas que geram M_1 , definimos um morfismo graduado de um módulo graduado livre F_1 para F_0 . Procedendo desse modo, construímos uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

chamada *resolução livre graduada de* M . Esta é uma sequência exata e ainda o cokernel de φ_1 é M . Como φ_i preserva grau, conseguimos então uma sequência exata de espaços vetoriais de dimensão finita. Tomando a parte de grau d da resolução livre graduada de M , é sugerido escrever

$$h(M, d) = \sum_i (-1)^i h(F_i, d)$$

Essa soma poderia não ter significado, mas Hilbert mostrou que podemos fazê-la finita.

Exemplo 3.1.1. Considere o anel de polinômios em quatro indeterminadas $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ sobre um corpo k e o ideal $I = (x_0x_2 - x_1^2, x_3x_2 - x_0x_1, x_3x_1 - x_0^2)$. Vamos construir uma resolução livre graduada minimal para S/I . O nosso primeiro morfismo é a projeção $S \rightarrow S/I$, cujo kernel é o ideal I . Uma vez que I é gerado por 3 formas quadráticas, temos que $F_1 = S^3(-2)$. Os geradores de I podem ser vistos como os determinantes dos menores 2×2 da matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_0 & x_1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Se nós criarmos matrizes 3×3 repetindo suas linhas uma linha acima de X , então criamos matrizes cujos determinantes se anulam. Decompondo estes determinantes em termos dos geradores de I , obtemos

$$\det \begin{pmatrix} x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_0 & x_1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_3(x_0x_2 - x_1^2) - x_0(x_3x_2 - x_0x_1) + x_1(x_3x_1 - x_0^2)$$

e

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_0 & x_1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_0(x_0x_2 - x_1^2) - x_1(x_3x_2 - x_0x_1) + x_2(x_3x_1 - x_0^2).$$

Pode-se mostrar que estas são as únicas relações que se anulam envolvendo os geradores de I . Dessa forma, $F_2 = S^2(-3)$ e o mapa $F_2 \rightarrow F_1$ é injetor, finalizando o processo. Obtemos então a seguinte resolução livre graduada minimal para S/I

$$0 \rightarrow S^2(-3) \rightarrow S^3(-2) \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0.$$

Como prometido acima, a próxima proposição nos beneficia com uma fórmula para calcular a função de Hilbert a partir de uma resolução livre do módulo.

Proposição 3.1.2. *Suponha que $S = k[x_0, \dots, x_r]$, com k sendo um corpo. Se o S -módulo graduado M possui resolução livre finita*

$$0 \rightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

com cada $F_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})$, então

$$h(M, d) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_j \binom{r+d-a_{i,j}}{r}.$$

Demonstração. Como no Exemplo 1.3.8, sabemos que $h(S, d) = \binom{r+d}{r}$. Deslocando por $a_{i,j}$, obtemos $h(S(-a_{i,j}), n) = \binom{r+d-a_{i,j}}{r}$. Daí, para cada i , $h(F_i, d) = \sum_j \binom{r+d-a_{i,j}}{r}$. Pelo que vimos acima, temos então

$$h(M, d) = \sum_{i=0}^m (-1)^i h(F_i, d) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_j \binom{r+d-a_{i,j}}{r}$$

como desejávamos. □

Corolário 3.1.3. Se M possui uma resolução livre como na Proposição 3.1.2 e $p_M(d)$ é o polinômio de Hilbert de M , então $h(M, d) = p_M(d)$, para $d \geq \max\{a_{i,j} - r\}$.

Demonstração. Basta notar que se $d + r - a_{i,j} \geq 0$, então

$$\binom{d + r - a_{i,j}}{r}$$

é um polinômio binomial de grau r em d , e assim o resultado segue da Proposição 3.1.2. \square

Exemplo 3.1.4. Considere o anel S e o ideal I como no Exemplo 3.1.1. Olhando para a resolução livre graduada minimal de S/I , temos pela Proposição 3.1.2 que a função de Hilbert de S/I é dada por

$$\begin{aligned} h(S/I, d) &= (-1)^0 \binom{d+3-0}{3} + (-1)^1 \cdot 3 \binom{d+3-2}{3} + (-1)^2 \cdot 2 \binom{d+3-3}{3} \\ &= \binom{d+3}{3} - 3 \binom{d+1}{3} + 2 \binom{d}{3} \\ &= \frac{(d+3)(d+2)(d+1)}{3!} - 3 \frac{(d+1)d(d-1)}{3!} + 2 \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} \\ &= 3d + 1. \end{aligned}$$

Além disso, o Corolário 3.1.3 nos diz que para $d \geq 0$, temos a concordância entre a função de Hilbert e seu polinômio

$$h(S/I, d) = p_{S/I}(d) = 3d + 1.$$

Descreveremos abaixo uma forma mais compacta de expressar resoluções livres, que será por meio de diagramas de Betti.

Suponha uma resolução livre

$$\mathcal{F}_\bullet : 0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_m \longrightarrow \cdots F_0$$

onde $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$, isto é, $\beta_{i,j}$ é a quantidade mínima de geradores de grau j em F_i . Então, o diagrama de Betti de \mathcal{F}_\bullet possui a forma

	0	1	...	s
i	$\beta_{0,i}$	$\beta_{1,i+1}$...	$\beta_{s,i+s}$
$i+1$	$\beta_{0,i+1}$	$\beta_{1,i+2}$...	$\beta_{s,i+1+s}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
j	$\beta_{0,j}$	$\beta_{1,j+1}$...	$\beta_{s,j+s}$

As $s+1$ colunas correspondem aos módulos F_i . Já as linhas são dispostas de inteiros consecutivos que correspondem aos graus. Podemos omitir linhas e colunas “desnecessárias”. A m -ésima coluna especifica os graus dos geradores de F_m . Colocaremos “—” no lugar de 0 e “*” quando o valor é indefinido. Dessa maneira, a entrada na j -ésima linha e da i -ésima coluna é $\beta_{i,i+j}$.

Observação 3.1.5. Essa escolha de diagrama, a priori, não é tão intuitiva: porque a entrada j, i não corresponde a $\beta_{i,j}$, por exemplo? A resposta está no seguinte: Se \mathcal{F}_\bullet é uma resolução livre graduada minimal de um S -módulo M , nos referiremos ao diagrama de Betti de \mathcal{F}_\bullet , como o *diagrama de Betti de M* e os números $\beta_{m,d}$ de \mathcal{F}_\bullet são chamados de *números graduados de Betti de M* , escritos também como $\beta_{m,d}(M)$. O espaço vetorial graduado $\text{Tor}_m^S(M, k)$ é a m -ésima homologia do complexo $\mathcal{F}_\bullet \otimes_S k$. O fato de que os diferenciais desse complexo preservam grau e pela minimalidade de \mathcal{F}_\bullet , estes diferenciais são nulos, temos assim que $\beta_{m,d}(M) = \dim_k \text{Tor}_m^S(M, k)_d$.

De maneira mais sucinta e prática, podemos construir o diagrama de Betti da resolução \mathcal{F}_\bullet como procede: Ponha $s + 1$ o número de colunas, $|j| + 1$ o número de linhas, i o mínimo dos graus dos geradores de F_0 , $s + j$ o máximo dos geradores dos módulos F_0, \dots, F_s , e assim na entrada j, i coloque $\beta_{i,i+j}$.

Exemplo 3.1.6. Novamente considere o anel S e o ideal I , abordados no Exemplo 3.1.1. Vimos que

$$0 \longrightarrow S^2(-3) \longrightarrow S^3(-2) \longrightarrow S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre graduada minimal para S/I . Os números de Betti são $\beta_{0,0} = 1$, $\beta_{1,2} = 3$, $\beta_{2,3} = 2$ e $\beta_{i,j} = 0$, para todos os outros pares (i, j) . Expressaremos o diagrama de Betti para S/I . O número de colunas é 3. Note que $i = 0$, $j = 1$, logo teremos duas linhas e o diagrama procurado é

	0	1	2
0	1	—	—
1	—	3	2

A próxima proposição descreve uma propriedade bastante útil dos números graduados de Betti.

Proposição 3.1.7. *Seja $\beta_{i,j}$ os números graduados de Betti de um S -módulo finitamente gerado M . Se d é um inteiro tal que $\beta_{i,j} = 0$, para todo $j < d$, então $\beta_{i+1,j+1} = 0$, para todo $j < d$.*

Demonstração. Suponha

$$\mathcal{F}_\bullet : \dots \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0$$

uma resolução livre minimal de M . Pela minimalidade de \mathcal{F}_\bullet , qualquer gerador de F_{i+1} é levado em um elemento não-nulo de mesmo grau em $\mathfrak{m}F_i$. Dizer que $\beta_{i,j} = 0$, para todo $j < d$, significa que todos os geradores, e em especial, todos os elementos não-nulos de F_i possuem grau maior ou igual a d . Assim, todos os elementos não-nulos em $\mathfrak{m}F_i$ possuem ao menos grau $d + 1$. Logo, os geradores de F_{i+1} somente podem possuir grau maior ou igual a $d + 1$, e isto nos diz que $\beta_{i+1,j+1} = 0$, para todo $j < d$. \square

Com o que temos, podemos então obter uma nova fórmula para a função de Hilbert em termos dos números graduados de Betti.

Proposição 3.1.8. *Seja $\beta_{i,j}$ os números graduados de Betti de um S -módulo finitamente gerado M . Pondo $B_j = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \beta_{i,j}$, determinamos a função de Hilbert pela fórmula*

$$h(M, d) = \sum_j B_j \binom{r + d - j}{r}.$$

Além disso, as somas alternadas B_j são calculadas indutivamente via a fórmula

$$B_j = h(M, j) - \sum_{k < j} B_k \binom{r + j - k}{r}.$$

Demonstração. A Proposição 3.1.2 nos proporciona a primeira fórmula, pois

$$\begin{aligned} h(M, d) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_j \binom{r + d - a_{i,j}}{r} \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_j \beta_{i,j} \binom{r + d - j}{r} \\ &= \sum_j \sum_{i=0}^m (-1)^i \beta_{i,j} \binom{r + d - j}{r} \\ &= \sum_j B_j \binom{r + d - j}{r}. \end{aligned}$$

Calculemos então B_j . Como M é finitamente gerado existe j_0 , tal que $h(M, d) = 0$, para todo $d \leq j_0$. Como $\beta_{0,j}$ é o número mínimo de geradores de grau j , então $\beta_{0,j} = 0$, para todo $j \leq j_0$. Utilizando indutivamente a Proposição 3.1.7, teremos $\beta_{i,j} = 0$, para todo i . Dessa maneira a soma alternada B_j é nula para $j \geq j_0$. Uma vez que, $\binom{r+d-j}{r} = 0$, para $d < j$, obtemos

$$\begin{aligned} h(M, d) &= \sum_{j=0}^d B_j \binom{r + d - j}{r} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} B_j \binom{r + d - j}{r} + B_d \binom{r + d - d}{r} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} B_j \binom{r + d - j}{r} + B_d \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$B_d = h(M, d) - \sum_{j=0}^{d-1} B_j \binom{r + d - j}{r}.$$

□

3.2 Ideais Monomiais e Complexos Simpliciais

Definição 3.2.1. Um *complexo simplicial finito* Δ é um par (V, F) composto de um conjunto finito V , chamado o *conjunto de vértices* (ou *nós*) de Δ e $F \in \mathcal{P}(V)$ é uma coleção de subconjuntos de V , satisfazendo a seguinte sentença

$$A \in F \text{ e } B \subseteq A, \text{ então } B \in F.$$

Cada elemento $A \in F$ é chamado de *face* de Δ , e F o *conjunto das faces* de Δ . Assim, podemos reescrever a sentença acima como

Se A é uma face e $B \subseteq A$, então B também é uma face.

Faces minimais com relação à inclusão são chamadas de *facet*as. Um *simplexo* é um complexo simplicial em que $F = \mathcal{P}(V)$, ou seja, todo subconjunto de V é uma face.

Exemplo 3.2.2. Considere o $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e F o conjunto das faces representado pela figura 3.1. O complexo simplicial $\mathcal{O} = (V, F)$ é chamado de *octaedro*. As facetas do octaedro são os conjuntos $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_1, v_4, v_5\}$, $\{v_1, v_5, v_6\}$, $\{v_1, v_3, v_6\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_4, v_5\}$, $\{v_2, v_5, v_6\}$ e $\{v_2, v_3, v_6\}$.

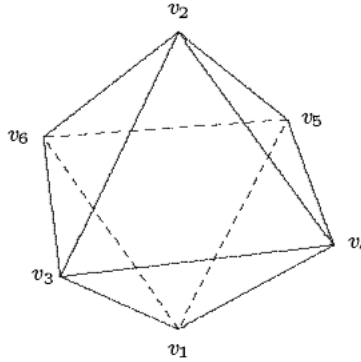


Figura 3.1: Octaedro

Observação 3.2.3. Para qualquer conjunto de vértices V , podemos formar o *complexo simplicial vazio*, que não possui nenhuma face. Mas, se o complexo simplicial possui alguma face, então necessariamente o conjunto vazio \emptyset é uma face. Chamaremos ainda de *complexo simplicial irrelevante em V* o complexo simplicial cuja sua única face é o conjunto vazio.

Definição 3.2.4. Seja $\Delta = (V, F)$ um complexo simplicial. Uma *orientação em Δ* é uma ordenação em seu conjunto de vértices V .

Definição 3.2.5. Seja $\Delta = (V, F)$ um complexo simplicial. Dizemos que Δ *está rotulado (por monômios de S)*, se existe um monômio de $S = k[x_0, \dots, x_r]$ (k um corpo) associado a cada vértice de Δ .

Seja $I = (m_1, \dots, m_n)$ um ideal monomial (gerado pelos monômios $m_1, \dots, m_n \in S$) em $S = k[x_0, \dots, x_r]$ onde k é um corpo. Para cada subconjunto A de $\{1, \dots, n\}$, considere $m_A = \text{mmc}(m_i : i \in A)$. Sejam $\alpha_A \in \mathbb{N}^n$ o vetor expoente de m_A e $S(-\alpha_A)$ o S -módulo livre como gerador de multigrau α_A . A *resolução de Taylor de S/I* é o complexo \mathbb{Z}^n -graduado $\mathcal{T} = \bigoplus_{A \in \{1, \dots, n\}} S(-\alpha_A)$, cuja base é denotada por $\{e_A\}_{A \in \{1, \dots, n\}}$, equipada com o diferencial

$$\delta(e_A) = \sum_{i \in A} \text{sgn}(i, A) \frac{m_A}{m_{A \setminus i}} e_{A \setminus i} \quad (3.1)$$

onde $\text{sgn}(i, A)$ é $(-1)^{j+1}$ se i é o j -ésimo elemento na ordem de A . O nome “resolução” de Taylor será justificado mais a frente, em que provaremos que este complexo é de fato uma resolução de S/I .

Cada complexo simplicial Δ sobre $V = \{1, \dots, n\}$ define um “subresolução” da resolução de Taylor.

Seja $\Delta = (V, F)$ um complexo simplicial cujos vértices são rotulados pelos geradores do ideal monomial I . Cada face de Δ é rotulada pelo mínimo múltiplo comum dos rótulos de seus vértices. Os vetores expoentes desses monômios definem uma \mathbb{N}^{r+1} -gradação em Δ . Definimos uma “subresolução” $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(\Delta, S)$, o complexo \mathbb{N}^{r+1} -graduado formado pelos S -módulos livres $F_\Delta = \bigoplus_{A \in F} S(-\alpha_A)$. O módulo F_i nesse complexo é o S -módulo livre cuja base consiste do conjunto de faces de Δ possuindo i elementos e o diferencial deste complexo é obtido homogeneizando o diferencial (3.1).

Observação 3.2.6. Se Δ é o complexo simplicial não-vazio então $F_0 = S$. Além disso, o módulo F_1 corresponde aos vértices de Δ , a cada gerador é levado pelo diferencial δ em seu respectivo rótulo, e assim

$$H_0(\mathcal{C}(\Delta)) = \text{Coker}(F_1 \xrightarrow{\delta} S) = S/I.$$

Exemplo 3.2.7. Considere o ideal monomial $I = (x_0^2 x_2^3, x_0^3 x_2^2, x_0 x_1 x_2, x_1^2)$ em $S = k[x_0, x_1, x_2]$. Vamos calcular a resolução do complexo simplicial representado pela figura 3.3.6, o qual é chamado de *complexo scarf*.

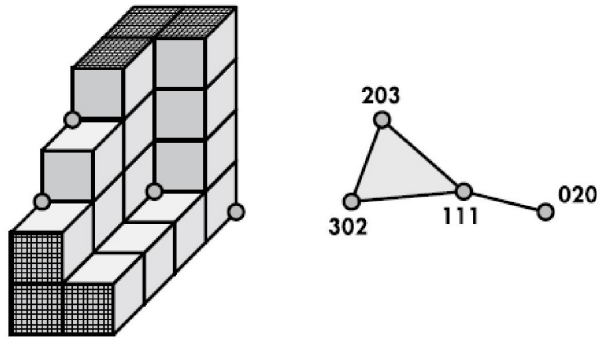


Figura 3.2: Complexo Scarf

Por simplicidade, associaremos aos vetores expoentes a bijeção

$$1 \leftrightarrow (2, 0, 3) \quad 2 \leftrightarrow (3, 0, 2) \quad 3 \leftrightarrow (1, 1, 1) \quad 4 \leftrightarrow (0, 2, 0)$$

e omitiremos na resolução estes multigrados. Pela Observação 3.2.6, temos $F_0 = S$ e o primeiro morfismo é a projeção canônica $S \rightarrow S/I$. O complexo Scarf é composto de quatro vértices, quatro faces contendo dois elementos e uma face contendo três elementos e dessa forma $F_1 = S^4$,

$F_2 = S^4$ e $F_3 = S$. Calculemos o morfismo $S^4 \longrightarrow S^4$:

$$\begin{aligned}\delta(e_{1,2}) &= (-1)^{1+1} \frac{x_0^3 x_2^3}{x_0^3 x_2^2} e_2 + (-1)^{1+2} \frac{x_0^3 x_2^3}{x_0^2 x_2^3} e_1 \\ &= -x_0 \cdot e_1 - x_2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4.\end{aligned}$$

Aplicando o diferencial δ nos outros elementos da base obtemos

$$\begin{aligned}\delta(e_{1,3}) &= -x_0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + x_0 x_2^2 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \\ \delta(e_{2,3}) &= 0 \cdot e_1 - x_1 \cdot e_2 + x_0^2 x_2 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \\ \delta(e_{3,4}) &= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - x_1 \cdot e_3 + x_0 x_2 \cdot e_4.\end{aligned}$$

Na forma matricial, conseguimos a aplicação

$$A = \begin{pmatrix} -x_0 & -x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_0 x_2^2 & x_0^2 x_2 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 x_2 \end{pmatrix}.$$

A aplicação $S \longrightarrow S^4$:

$$\begin{aligned}\delta(e_{1,2,3}) &= (-1)^{1+1} \frac{x_0^3 x_1 x_2^3}{x_0^3 x_1 x_2^2} e_{2,3} + (-1)^{1+2} \frac{x_0^3 x_1 x_2^3}{x_0^2 x_1 x_2^3} e_{1,3} + (-1)^{1+3} \frac{x_0^3 x_1 x_2^3}{x_0^3 x_2^3} e_1, \\ &= x_1 \cdot e_{1,2} - x_0 \cdot e_{1,3} + x_2 \cdot e_{2,3} + 0 \cdot e_{3,4}\end{aligned}$$

que é a matriz

$$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então a resolução de Taylor do complexo scarf é

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{B} S^4 \xrightarrow{A} S^4 \xrightarrow{I} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0$$

onde I é a matriz que representa os geradores do ideal:

$$I = \begin{pmatrix} x_0^2 x_2^3 & x_0^3 x_2^2 & x_0 x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}.$$

3.3 O Teorema das Sizígias de Hilbert

Como na seção anterior, considere $S = k[x_0, \dots, x_r]$ e Δ um complexo simplicial qualquer. Se rotularmos todos os vértices de Δ por $1 \in k$, então a $\mathcal{C}(\Delta, k)$ é, a menos de deslocamento no grau homológico (isto será explicado abaixo), o *complexo reduzido de Δ com coeficientes em S* . Sua homologia é escrita como $H_i(\Delta, k)$ e é chamada *homologia reduzida de Δ com coeficientes em S* . O deslocamento homológico se dá da seguinte maneira: o *grau homológico de um simplexo em $\mathcal{C}(\Delta)$* é o número de vértices no simplexo, que é um a mais que a *dimensão do simplexo*, portanto $H_i(\Delta, k)$ é a $(i+1)$ -ésima homologia de $\mathcal{C}(\Delta, k)$.

Estamos na direção de revelar um critério para decidir quando $\mathcal{C}(\Delta)$ é uma resolução de S/I , isto é, quando $H_i(\mathcal{C}(\Delta)) = 0$, para todo $i > 0$. Para tal, precisamos de mais uma

Definição 3.3.1. Se m é qualquer monômio em S , escrevemos Δ_m para o subcomplexo consistindo das faces de Δ , cujos rótulos dividem m . Um *subcomplexo cheio* de Δ é um subcomplexo de todas as faces de Δ que envolvem um conjunto particular de vértices.

Observação 3.3.2. (a) Se m não é divisível por nenhum dos rótulos, então Δ_m é o complexo simplicial que não possui vértices e sua única face é o conjunto vazio. O denotaremos por Δ_\emptyset .

(b) Se m é divisível por todos os rótulos de Δ , então $\Delta_m = \Delta$. Mais geralmente, $\Delta_m = \Delta_{mmc(m_j:j \in J)}$, para algum subconjunto J do conjunto de vértices de Δ .

(c) Todos os subcomplexos da forma Δ_m são cheios.

O próximo teorema é o critério prometido anteriormente. Além de que, este também diz respeito a minimalidade da resolução.

Teorema 3.3.3 (Bayer, Peeva e Sturmfels). *Considere Δ um complexo simplicial rotulado pelos monômios $m_1, \dots, m_t \in S$ e $I = (m_1, \dots, m_t)$, o ideal gerado pelos rótulos dos vértices. Então o complexo $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(\Delta, S)$ é uma resolução livre de S/I se, e somente se, a homologia reduzida $H_i(\Delta_m, k)$ se anula para todo monômio $m \in S$ e todo $i \geq 0$. Mais ainda, $\mathcal{C}(\Delta)$ é um complexo minimal se, e só se, $m_A \neq m_{A'}$, para toda subface própria $A' \subsetneq A$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}(\Delta)$ o complexo

$$\mathcal{C}(\Delta) : \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\delta} F_{i-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta} F_0.$$

Pela Observação 3.2.6, $S/I = \text{Coker } \delta$, com $\delta : F_1 \longrightarrow F_0$. Identificaremos a homologia de $\mathcal{C}(\Delta)$ em F_i com uma soma direta de cópias dos k -espaços vetoriais $H_i(\Delta_m, k)$. Para tal, seja $\alpha \in \mathbb{Z}^{r+1}$ e considere o complexo

$$\mathcal{C}(\Delta)_\alpha : \cdots \longrightarrow (F_i)_\alpha \xrightarrow{\delta} (F_{i-1})_\alpha \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta} (F_0)_\alpha$$

formado pelas componentes de multigrado α de cada submódulo livre F_i em $\mathcal{C}(\Delta)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha \in \mathbb{N}^{r+1}$, pois se qualquer das componentes de α é negativa, então $\mathcal{C}(\Delta)_\alpha = 0$, e assim, a homologia se anula nesse grau. Ponha $m = x^\alpha = x_0^{\alpha_0} \cdots x_r^{\alpha_r} \in S$. Para cada face $A \in F$, o complexo $\mathcal{C}(\Delta)$ possui um somando livre de posto 1, denotado $S.A$, com base $\{n.e_A\}$ para monômios $n \in S$. O grau de $n.e_A$ é o expoente de $n.m_A$. Assim, para a parte de grau α de $S.A$, temos

$$(S.A)_\alpha = \begin{cases} k \left(\frac{x^\alpha}{m_A} \right) e_A, & \text{se } m_A | m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

De forma que, o complexo $\mathcal{C}(\Delta)_\alpha$ possui uma k -base em correspondência biunívoca com as faces de Δ_m . Utilizando esta correspondência, podemos identificar os termos do complexo $\mathcal{C}(\Delta)_\alpha$ com os termos do complexo reduzido de Δ_m com coeficientes em k (a menos de deslocamento no grau homológico). Dessa identificação, vemos que o complexo $\mathcal{C}(\Delta)$ é uma resolução de S/I , se e somente se, $H_i(\Delta_m, k) = 0$, para todo $i \geq 0$, provando a primeira afirmação. Para a segunda, observe que se A é uma $i+1$ -face e A' é uma i -face de Δ , então a componente do diferencial

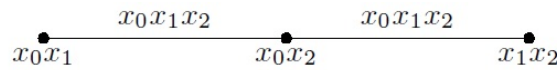
de $\mathcal{C}(\Delta)$ que envia $S.e_A$ em $S.e_{A'}$ é nula, a menos que $A' \subseteq A$, ou seja, $\pm m_A/m'_{A'}$. Portanto, $\mathcal{C}(\Delta)$ é um complexo minimal se, e só se, $m_A \neq m_{A'}$, para toda subface própria $A' \subsetneq A$, como desejávamos. \square

Como consequência imediata do teorema anterior, justificamos o nome “resolução” de Taylor.

Corolário 3.3.4. *Seja $I = (m_1, \dots, m_n) \in S$ qualquer ideal monomial. Então a resolução de Taylor de $\{m_1, \dots, m_n\}$ é uma resolução livre de S/I .*

Observação 3.3.5. Utilizando teorema anterior e a Observação 3.3.2 podemos decidir se $\mathcal{C}(\Delta)$ é uma resolução, apenas checando a condição de nulidade nos monômios que são os mínimos múltiplos comuns do conjunto dos rótulos dos vértices de Δ .

Exemplo 3.3.6. Considere Δ o complexo simplicial rotulado disposto na figura



no qual a orientação utilizada é ordenando os vértices da esquerda para a direita. Aplicando o diferencial (3.1) como no Exemplo 3.2.7 vemos que o complexo $\mathcal{C}(\Delta)$ é

$$0 \longrightarrow S^2(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 & 0 \\ x_1 & -x_1 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix}} S^3(-2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_0x_1 & x_0x_2 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S$$

O diagrama de Betti de $\mathcal{C}(\Delta)$ é

	0	1	2
0	1	-	-
1	-	3	2

Considerando $\mathcal{C}(\Delta; k)$ o complexo reduzido com coeficientes em S ,

$$0 \longrightarrow S^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} S^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} S$$

no qual o diagrama de Betti é

	0	1	2
-2	-	-	2
-1	-	3	-
0	1	-	-

Seus subcomplexos da forma Δ_m são: o complexo vazio Δ_1 , os complexos $\Delta_{x_0x_1}$, $\Delta_{x_0x_2}$, $\Delta_{x_1x_2}$ que consistem apenas em um ponto e o próprio complexo Δ . Sendo cada um destes um espaço contrátil, suas homologias reduzidas são nulas. Mais ainda, como $m_A \neq m_{A'}$, para cada subface $A' \subseteq A$ em Δ , segue pelo Teorema 3.3.3 que o complexo $\mathcal{C}(\Delta)$ é uma resolução livre minimal para $S/(x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$.

Exemplo 3.3.7. Considere o ideal $I = (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2) \subseteq S$. Pondo $m_1 = x_0x_1$, $m_2 = x_0x_2$, $m_3 = x_1x_2$, afirmamos que a resolução de Taylor de $\{m_1, m_2, m_3\}$ não é minimal. Com efeito, a resolução de Taylor pode ser obtida através do complexo simplicial Δ da figura abaixo,

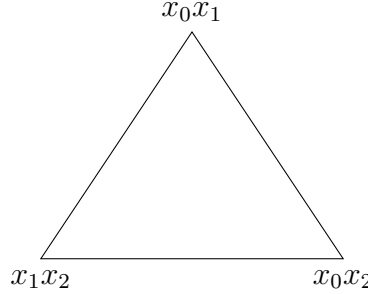


Figura 3.3: Resolução de Taylor

cujas orientações são dadas no sentido anti-horário. O complexo $\mathcal{C}(\Delta)$ neste caso é

$$0 \longrightarrow S(-4) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} S^3(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_1 \\ -x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & -x_0 & 0 \end{pmatrix}} S^3(-2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_0x_1 & x_0x_2 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S.$$

Agora, a face $A' = \{x_0x_1, x_0x_2\}$ é subface de $A = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2\}$, mas $m_{A'} = x_0x_1x_2 = m_A$, e portanto pelo Teorema 3.3.3, a resolução $\mathcal{C}(\Delta)$ não é minimal.

Podemos definir o *complexo de Koszul* $K_\bullet(x_0, \dots, x_r)$ das indeterminadas x_0, \dots, x_r , como sendo o complexo de Taylor de $\{x_0, \dots, x_r\}$. Para ilustrar, os três primeiros complexos de Koszul são

$$\begin{aligned} K_\bullet(x_0) : 0 &\longrightarrow S(-1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_0 \end{pmatrix}} S \\ K_\bullet(x_0, x_1) : 0 &\longrightarrow S(-2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix}} S^2(-1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix}} S \\ K_\bullet(x_0, x_1, x_2) : 0 &\longrightarrow S(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} S^3(-2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_1 \\ -x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & -x_0 & 0 \end{pmatrix}} S^3(-1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}} S \end{aligned}$$

O Teorema 3.3.3 nos dá a garantia de que o complexo de Koszul é uma resolução livre minimal do corpo $k \cong S/(x_0, \dots, x_r)$. Mais geralmente, podemos trocar as indeterminadas por quaisquer polinômios f_0, \dots, f_r , para obter o seu complexo de Koszul, denotado por $K_\bullet(f_0, \dots, f_r)$. Sob boas hipóteses, por exemplo, quando os f_i são elementos homogêneos de grau positivo em um anel graduado, este complexo é uma resolução se, e somente se, f_0, \dots, f_r é uma sequência regular. O leitor interessado em uma demonstração deste fato pode ver por exemplo [Eisenbud 1995, Teorema 17.6].

Utilizando o complexo de Koszul e o Teorema 3.3.3, provaremos a próxima proposição, que nos fornece uma outra maneira de calcular os números graduados de Betti.

Proposição 3.3.8. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre $S = k[x_0, \dots, x_r]$, sendo k um corpo. O número graduado de Betti $\beta_{i,j}$ é a dimensão da homologia no termo $M_{j-i} \otimes \bigwedge^i(k^{r+1})$, do complexo*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow M_{j-(r+1)} \otimes \bigwedge^{r+1}(k^{r+1}) \longrightarrow \dots \\ &\dots \longrightarrow M_{j-i-1} \otimes \bigwedge^{i+1}(k^{r+1}) \longrightarrow M_{j-i} \otimes \bigwedge^i(k^{r+1}) \longrightarrow M_{j-i-1} \otimes \bigwedge^{i-1}(k^{r+1}) \longrightarrow \dots \\ &\dots \longrightarrow M_j \otimes \bigwedge^0(k^{r+1}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\beta_{i,j} \leq h(M, j-i) \binom{r+1}{i}.$$

Em particular, $\beta_{i,j} = 0$, para todo $i > r+1$.

Demonstração. Sabemos pela Observação 3.1.5, que $\beta_{i,j} = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M, k)_j$. Pelo que foi visto anteriormente temos que o complexo de Koszul $K_\bullet(x_0, \dots, x_r)$ é uma resolução livre minimal de k e dessa maneira podemos calcular $\operatorname{Tor}_i^R(M, k)_j$, como sendo a parte de grau j da homologia $M \otimes_S K_\bullet(x_0, \dots, x_r)$ no termo

$$M \otimes_S \bigwedge^i(S^{r+1}(-i)).$$

Podemos trocar o termo acima por $M \otimes_k \bigwedge^i(k^{r+1}(-i))$, pois temos os seguintes isomorfismos

$$M \otimes_S \bigwedge^i(S^{r+1}) \cong \bigwedge^i(M \otimes_S S^{r+1}) \cong \bigwedge^i(M^{r+1}) \cong \bigwedge^i(M \otimes_k k^{r+1}) \cong M \otimes_k \bigwedge^i(k^{r+1})$$

onde o deslocamento por i é preservado. Decomponha $M = \bigoplus_k M_k$ e observe que a parte de grau j de $M \otimes_k \bigwedge^i(k^{r+1}(-i))$ é $M_{j-i} \otimes_k \bigwedge^i(k^{r+1}(-i))$. Uma vez que os diferenciais do complexo $M \otimes_S K_\bullet(x_0, \dots, x_r)$ preservam grau, o número graduado de Betti $\beta_{i,j}$ é a dimensão da homologia em

$$M_{j-i-1} \otimes \bigwedge^{i+1}(k^{r+1}) \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_{j-i} \otimes \bigwedge^i(k^{r+1}) \xrightarrow{\varphi_i} M_{j-i-1} \otimes \bigwedge^{i-1}(k^{r+1}).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= \dim_k \ker(\varphi_{i+1}) / \operatorname{Im}(\varphi_i) \\ &= \dim_k \ker(\varphi_{i+1}) - \dim_k \operatorname{Im}(\varphi_i) \\ &\leq \dim_k \ker(\varphi_{i+1}) \\ &\leq \dim_k M_{j-i} \otimes \bigwedge^i(k^{r+1}) \\ &= \dim_k(M_{j-i}) \cdot \dim_k \bigwedge^i(k^{r+1}) \\ &= h(M, j-i) \cdot \binom{r+1}{i}. \end{aligned}$$

A última afirmação é imediata, pois $\binom{r+1}{i} = 0$, se $i > r+1$. □

Podemos reescrever a última afirmação da proposição anterior, pensando que o número de indeterminadas do anel base é uma cota superior para a dimensão projetiva do módulo. Este é o enunciado do Teorema das Sizíguas de Hilbert.

Teorema 3.3.9 (Sizíguas de Hilbert). *Considere $S = k[x_0, \dots, x_r]$ e M um S -módulo graduado finitamente gerado. Então, M possui uma resolução livre graduada finita*

$$0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

com $m \leq r + 1$. Em especial, $\text{pd}_S(M) \leq r + 1$.

Demonstração. Podemos considerar a resolução livre graduada minimal de M ,

$$\mathcal{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_m \longrightarrow \cdots F_0$$

onde $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$ Assim,

$$\text{pd}_R(M) = \sup\{i : \beta_{i,j} \neq 0\}$$

e o teorema segue aplicando a Proposição 3.3.8. □

Capítulo 4

Um Pouco sobre Cohomologia Local

Em geometria algébrica, os grupos de cohomologia local provém dos funtores derivados do funtor de seções globais em relação a um feixe de grupos abelianos, com suporte em um subconjunto fechado. Em 1961, na publicação de Grothendieck: “Local Cohomology”, Lecture Notes, surge a confirmação de cohomologia local como uma ferramenta na álgebra local. Desde então, cohomologia local tornou-se uma indispensável ferramenta em álgebra comutativa. Neste capítulo, abordaremos cohomologia local como os funtores derivados do funtor de I -torção. Depois, mostraremos que cohomologia local pode ser interpretada como limite direto, a partir dos já conhecidos funtores de extensão. Veremos como calcular cohomologia local utilizando os complexos de Čech. Finalmente, provaremos a dualidade local e os teoremas de nulidade de Grothendieck e Serre.

4.1 Os Funtores de I -Torção

Considere R um anel, $I \subseteq R$ um ideal, M um R -módulo e $n \geq 0$ um inteiro. Denote

$$(0 :_M I^n) = \{m \in M \mid I^n m = 0\}$$

É fácil ver que este conjunto é um submódulo de M , e ainda, temos uma cadeia ascendente de submódulos

$$(0) \subseteq (0 :_M I) \subseteq (0 :_M I^2) \subseteq \cdots \subseteq (0 :_M I^n) \subseteq \cdots$$

Dessa maneira, tomando a união temos o seguinte submódulo

$$\Gamma_I(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M I^n)$$

que é chamado de *submódulo I -torção de M* .

Podemos enxergar o submódulo $(0 :_M I^n)$ em termos homológicos.

Observação 4.1.1. Temos um isomorfismo de R -módulos $(0 :_M I^d) \cong \text{Hom}(R/I^d, M)$. Para ver isso, note que $m \in (0 :_M I^d)$ induz um morfismo $f_m : R/I^d \rightarrow M$, que envia $r + I^d \mapsto rm$. O morfismo f_m está bem definido, pois se $r + I^d = r' + I^d$, temos $r - r' \in I^d$. Daí, como $m \in (0 :_M I^d)$ temos $(r - r')m = 0$, isto é, $rm = r'm$. Dessa forma o morfismo de R -módulos $m \mapsto f_m$ é um isomorfismo, cuja inversa é $g \mapsto g(1 + I^d)$, com $g \in \text{Hom}(R/I^d, M)$.

Exemplo 4.1.2. Seja p um número primo. Então

$$\Gamma_{p\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$$

Com efeito, seja $\frac{a}{p^k} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$. Observe que para qualquer inteiro r , temos $p^k r \frac{a}{p^k} = ra \in \mathbb{Z}$, logo $p^k \mathbb{Z} \left(\frac{a}{p^k} + \mathbb{Z} \right) = 0 + \mathbb{Z}$. Por outro lado, se $\frac{a}{b} + \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(a, b) = 1$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $p^n \mathbb{Z} \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \right) = 0 + \mathbb{Z}$. Para qualquer inteiro q , temos $p^n q \frac{a}{b} = c_q$, para algum $c_q \in \mathbb{Z}$. Em especial, se $q = 1$, obtemos $p^n \frac{a}{b} = c_1$, ou seja, $p^n a = bc_1$. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, existem $t, s \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $at + bs = 1$. Multiplicando por p^n , $p^n at + p^n bs = p^n$. Daí, $bc_1 t + p^n bs = p^n$, equivalentemente $b(c_1 t + p^n s) = p^n$, ou seja, $b|p^n$. Portanto, $b = p^k$, para algum $k \in \{1, \dots, n\}$, como queríamos.

Considere agora $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de R -módulos. É verdade que $f(\Gamma_I(M)) \subseteq \Gamma_I(N)$. Assim, faz sentido definir

$$\Gamma_I(f) = f|_{\Gamma_I(M)} : \Gamma_I(M) \longrightarrow \Gamma_I(N).$$

Estas relações são functoriais. A observação abaixo nos mostra as relações necessárias para considerar $\Gamma_I(-) : R\text{mod} \longrightarrow R\text{mod}$ como um funtor covariante R -linear, o chamado *funtor de I-torção*. Se $\Gamma_I(M) = 0$, dizemos que M é *I-torção livre* e se $\Gamma_I(M) = M$, M é dito ser *módulo I-torção*.

Observação 4.1.3. Dados três morfismos de R -módulos $f, g : M \longrightarrow N$, $h : N \longrightarrow L$ e $r \in R$, as seguintes propriedades são verificadas:

- (a) $\Gamma_I(h \circ f) = \Gamma_I(h) \circ \Gamma_I(f)$;
- (b) $\Gamma_I(f + g) = \Gamma_I(f) + \Gamma_I(g)$;
- (c) $\Gamma_I(rf) = r\Gamma_I(f)$;
- (d) $\Gamma_I(id_M) = id_{\Gamma_I(M)}$.

Exemplo 4.1.4. Seja n um inteiro não-nulo. Então $\Gamma_{n\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = 0$, pois se existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n^k \frac{a}{b} = 0$, então $n^k a = 0$, e assim $a = 0$. Desse modo, \mathbb{Q} é \mathbb{Z} -módulo $n\mathbb{Z}$ -torção livre.

Proposição 4.1.5. Sejam R um anel, $I, J \in R$ ideais, e M um R -módulo. Então,

$$\Gamma_I(\Gamma_J(M)) = \Gamma_I(M) \cap \Gamma_J(M) = \Gamma_{I+J}(M).$$

Demonstração. A primeira igualdade é clara. Para a segunda, se $m \in \Gamma_{I+J}(M)$, então existe $r \geq 0$ tal que $m(I + J)^r = 0$. Uma vez que, $mI^r \subseteq m(I + J)^r$ e $mJ^r \subseteq m(I + J)^r$, então $mI^r = mJ^r = 0$ e assim $m \in \Gamma_I(M) \cap \Gamma_J(M)$. Reciprocamente, seja $m \in \Gamma_I(M) \cap \Gamma_J(M)$. Daí, existem $r_1, r_2 \geq 0$, satisfazendo $mI^{r_1} = mJ^{r_2} = 0$. Tome $r = r_1 + r_2$.

Afirmção: $mI^{r-i}J^i = 0$, com $i = 0, \dots, r$.

Com efeito, se $i \leq r_2$, temos

$$mI^{r-i}J^i = mI^{r_1}(I^{r_2-i}J^i) = 0.$$

Se $i > r_2$,

$$mI^{r-i}J^i = (I^{r_1+r_2-i}J^{i-r_2})mJ^{r_2} = 0.$$

Dessa afirmação, obtemos

$$m(I + J)^r = mI^n + mI^{r-1}J + \dots + mIJ^{r-1} + mJ^r = 0.$$

Donde, $m \in \Gamma_{I+J}(M)$. □

O próximo lema vai nos permitir definir os funtores de cohomologia local, tomando os funtores derivados à direita dos funtores de I -torção.

Lema 4.1.6. *Considere R um anel e $I \subseteq R$ um ideal. Então o funtor de I -torção $\Gamma_I(-) : R\text{mod} \rightarrow R\text{mod}$ é exato à esquerda.*

Demonstração. Seja

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $R\text{mod}$. Devemos mostrar que

$$0 \longrightarrow \Gamma_I(T) \xrightarrow{\Gamma_I(f)} \Gamma_I(M) \xrightarrow{\Gamma_I(g)} \Gamma_I(N)$$

é exata. Como f é injetiva, segue que $\Gamma_I(f)$ também é injetiva, por ser apenas uma restrição de f . Além disso, pela Observação 4.1.3, temos que $\Gamma_I(g) \circ \Gamma_I(f) = \Gamma_I(g \circ f) = \Gamma_I(0) = 0$, e assim $\text{Im}(\Gamma_I(f)) \subseteq \ker(\Gamma_I(g))$. Agora, seja $m \in \ker(\Gamma_I(g))$, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n m = 0$ e $g(m) = 0$. Pela exatidão da primeira sequência, $m = f(t)$, para algum $t \in T$. Se mostrarmos que $t \in \Gamma_I(T)$, o Lema está provado. Para tal, se $r \in I^n$, temos $f(rt) = rf(t) = rm = 0$. Pela injetividade de f , segue que $rt = 0$, provando que $I^n t = 0$. □

Definição 4.1.7. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos o i -ésimo funtor de cohomologia local com respeito ao ideal I , denotado por $H_I^i(-)$, como sendo o i -ésimo funtor derivado à direita de funtor de I -torção $\Gamma_I(-)$. Aplicando o funtor $H_I^i(-)$ em um R -módulo M , chamamos $H_I^i(M)$ de i -ésimo módulo de cohomologia local com respeito ao ideal I e M .

Observação 4.1.8. Uma vez que os funtores de cohomologia local são os funtores derivados à direita dos funtores de I -torção, estes também são funtores covariantes R -lineares e ainda, os funtores $H_I^0(-)$ e $\Gamma_I(-)$ são equivalentes pelo item (a) da Proposição 6.2.9. Além disso, o item (e) da Proposição 6.2.9 nos diz que qualquer sequência exata curta de módulos

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

induz longa de cohomologia local

$$\dots H_I^i(T) \longrightarrow H_I^i(M) \longrightarrow H_I^i(N) \longrightarrow H_I^{i+1}(T) \longrightarrow \dots$$

Exemplo 4.1.9. Seja p um número primo. A sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução injetiva de \mathbb{Z} . Vimos nos Exemplos 4.1.2 e 4.1.4 que $\Gamma_{p\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ e $\Gamma_{p\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = 0$. Portanto, $H_{p\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}) = 0$ e $H_{p\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$.

O próximo resultado mostra que o funtor de $\Gamma(-)$ é invariante por radicais.

Proposição 4.1.10. *Sejam R um anel Noetheriano, $I, J \in R$ ideais, e M um R -módulo. Então, $\Gamma_I(-) = \Gamma_J(-)$ se, e só se, $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.*

Demonstração. Se $\Gamma_I(-) = \Gamma_J(-)$, em particular $\Gamma_I(R/J) = \Gamma_J(R/J)$. Observe que $\bar{1} \in \Gamma_J(R/J)$, pois $\bar{1}J = (\bar{0})$. Logo, $\bar{1} \in \Gamma_I(R/J)$ e existe $l \geq 0$ no qual $\bar{1}I^l = I^l = (\bar{0})$. Dessa maneira, se $a \in I$, $a^k \in I$, para algum k , implicando que, $a^{kl} \in I^l = (\bar{0})$, ou seja, $a^{kl} \in J$ e $a \in \sqrt{J}$. Provamos que $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$. A inclusão inversa é provada de forma inteiramente análoga. Dessa vez, suponha que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ e considere M um R -módulo qualquer. Se $m \in \Gamma_I(M)$, temos que $I^r m = 0$, para algum r . Uma vez que, $J \subseteq \sqrt{J} = \sqrt{I}$ e R é anel Noetheriano, existe $s \geq 0$, satisfazendo $J^s \subseteq I$. Logo, $J^{sk} m \subseteq I^k m = 0$ e $m \in \Gamma_J(M)$. Provamos assim a inclusão $\Gamma_I(M) \subseteq \Gamma_J(M)$. A outra inclusão também é feita de maneira análoga. \square

Em consequência da Proposição 4.1.10 veremos a seguir que a cohomologia local não muda se os ideais possuem o mesmo ideal radical.

Proposição 4.1.11. *Sejam J, K ideais em um anel Noetheriano R , tais que $\sqrt{J} = \sqrt{K}$. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, os funtores $H_J^i(-)$ e $H_K^i(-)$ são equivalentes.*

Demonstração. Considere M um R -módulo e

$$I^\bullet : 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \longrightarrow \dots$$

uma resolução injetiva de M . Aplicando os funtores $\Gamma_J(-)$ e $\Gamma_K(-)$ obtemos sequências exatas

$$\Gamma_J(I^\bullet) : 0 \longrightarrow \Gamma_J(I^0) \xrightarrow{\Gamma_J(d^0)} \Gamma_J(I^1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_J(I^i) \xrightarrow{\Gamma_J(d^i)} \Gamma_J(I^{i+1}) \longrightarrow \dots$$

e

$$\Gamma_K(I^\bullet) : 0 \longrightarrow \Gamma_K(I^0) \xrightarrow{\Gamma_K(d^0)} \Gamma_K(I^1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_K(I^i) \xrightarrow{\Gamma_K(d^i)} \Gamma_K(I^{i+1}) \longrightarrow \dots$$

Pela Proposição 4.1.10, temos que para cada i , $\Gamma_J(I^i) = \Gamma_K(I^i)$ e consequentemente $\Gamma_J(d^i) = \Gamma_K(d^i)$. Dessa maneira,

$$H_J^i(M) = \ker(\Gamma_J(d^i))/\text{Im}(\Gamma_J(d^{i-1})) = \ker(\Gamma_K(d^i))/\text{Im}(\Gamma_K(d^{i-1})) = H_K^i(M).$$

\square

4.2 Cohomologia Local como Limite Direto

Proposição 4.2.1. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo e $I \subseteq R$ um ideal. Então existe um isomorfismo natural*

$$H_I^i(M) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^i(R/I^d, M),$$

onde o limite é tomado sobre os mapas $\text{Ext}_R^i(R/I^d, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I^e, M)$, induzidos pelos epimorfismos canônicos $R/I^e \twoheadrightarrow R/I^d$, para $e \leq d$.

Demonstração. O mapa $\text{Ext}_R^0(R/I^d, M) \cong \text{Hom}(R/I^d, M) \rightarrow M$ que faz $\varphi \mapsto \varphi(1)$ é injetor e sua imagem é $\{m \in M : I^d m = 0\} = (0 :_M I^d)$. Pela Observação 4.1.1, $(0 :_M I^d) \cong \text{Hom}(R/I^d, M)$ e assim o limite direto $\varinjlim \text{Ext}_R^0(R/I^d, M) \cong \varinjlim \text{Hom}(R/I^d, M)$ pode ser identificado com

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M I^n) = \Gamma_I(M) = H_I^0(M).$$

Por definição $\text{Ext}_R^i(R/I^d, -)$ é o i -ésimo funtor derivado de $\text{Hom}(R/I^d, -)$. A proposição segue pois limite direto comuta com o ato de tomar funtores derivados na categoria de R -módulos. \square

Por causa da identificação descrita acima, os módulos de cohomologia local carregam algumas propriedades dos funtores de extensão.

Corolário 4.2.2. *Qualquer elemento em $H_I^i(M)$ é anulado por alguma potência de I .*

Demonstração. Pela Proposição 4.2.1, cada elemento em $H_I^i(M)$ é identificado com um elemento em $\text{Ext}_R^i(R/I^d, M)$ (para algum d), e este é anulado por I^d . \square

Lema 4.2.3. *Sejam M um R -módulo e $I \subseteq R$ um ideal. Temos por verdade as seguintes afirmações:*

- (a) *Se I contém um elemento regular em M , então $\Gamma_I(M) = 0$.*
- (b) *Se M é finitamente gerado então $\Gamma_I(M) = 0$ se, e só se, I contém um elemento regular.*

Demonstração. (a) Sejam $r \in I$ elemento regular e $m \in \Gamma_I(M)$, isto é, $I^n m = 0$, para algum n . Em particular, $r^n m = 0$. Pela regularidade de r temos $m = 0$. Logo, $\Gamma_I(M) = 0$.

(b) Pela Observação 4.1.1,

$$\text{Hom}(R/I, M) \cong (0 :_M I) \subseteq \Gamma_I(M) = 0$$

Sendo $I = \text{ann}(R/I)$, o resultado segue aplicando a Proposição 2.2.5. \square

Outra característica preservada pelos funtores de extensão é o fato de poder caracterizar grades de ideais através dos módulos de cohomologia local (vide Teorema 2.2.7).

Teorema 4.2.4. *Seja R um anel Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Se $I \subseteq R$ é um ideal tal que $IM \neq M$, então*

$$\text{grade}(I, M) = \min\{i : H_I^i(M) \neq 0\}$$

Demonstração. Argumentaremos por indução sobre $g = \text{grade}(I, M)$. Caso $g = 0$, por definição todo elemento de I deve ser divisor de zero, logo $H_I^0(M) = \Gamma_I(M) \neq 0$ pelo item (b) do Lema 4.2.3. Suponha então $g > 0$ e o resultado válido para todo R -módulo finitamente gerado N com $IN \neq N$ e $\text{grade}(I, N) < g$. Seja $x \in I$ elemento M -regular. Pondo $M' = M/xM$, temos que $IM' \neq M'$ e por 2.2.14, $\text{grade}(I, M') = g - 1$. A hipótese indutiva nos diz que $H_I^i(M') = 0$, para todo $i < g - 1$ e $H_I^{g-1}(M') \neq 0$. A sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

produz para cada $i \in \mathbb{N}$ sequência exata,

$$H_I^{i-1}(M) \longrightarrow H_I^{i-1}(M') \longrightarrow H_I^i(M) \xrightarrow{x} H_I^i(M)$$

Dessa maneira para $i < g$, o elemento x é não-divisor de zero em $H_I^i(M)$. O Corolário 4.2.2 implica que $H_I^i(M)$ é módulo I -torção e assim $H_I^i(M) = 0$. Além disso, temos sequência exata

$$0 \longrightarrow H_I^{g-1}(M') \longrightarrow H_I^g(M)$$

e como $H_I^{g-1}(M') \neq 0$, segue que $H_I^g(M) \neq 0$. □

Exemplo 4.2.5. Considere $S = k[x, y]$ onde k é um corpo, $\mathfrak{m} = (x, y)$ e $R = S/(x^2, xy)$. A inclusão

$$S/\mathfrak{m} \cong k \hookrightarrow R = S/(x^2, xy)$$

nos diz que $0 \neq \text{Hom}(S/\mathfrak{m}, R) \cong \text{Ext}_S^0(S/\mathfrak{m}, R)$ e pelo Teorema 2.2.7 obtemos $\text{grade}(\mathfrak{m}, R) = 0$. No Exemplo 4.3.4 veremos que $H_{\mathfrak{m}}^0(R) = (\bar{x}) \neq 0$ e assim o Teorema 4.2.4 também garante que $\text{grade}(\mathfrak{m}, R) = 0$.

4.3 Cohomologia Local e Complexo de Čech

Seja R um anel Noetheriano e suponha $I \subseteq R$ um ideal gerado pelos elementos x_1, \dots, x_t . Escreveremos $[t] = \{1, \dots, t\}$ e para cada subconjunto $J \subseteq [t]$ defina $x_J = \prod_{j \in J} x_j$. Além disso, denotemos por $M[x_J^{-1}]$ a localização de M pelo subconjunto multiplicativo das potências de x_J .

A fim de definir o complexo de Čech precisamos de duas propriedades de módulos injetivos sobre anéis Noetherianos.

Lema 4.3.1. *Considere R um anel Noetheriano e E um R -módulo injetivo. São válidas as seguintes propriedades:*

- (a) *Para qualquer ideal $I \subseteq R$, $H_I^0(E)$ também é um R -módulo injetivo.*
- (b) *Para qualquer $x \in R$, o mapa de localização $E \longrightarrow E[x^{-1}]$ é sobrejetor.*

Demonstração. (a) Devemos mostrar que se $J \subseteq [t]$ é um ideal e $\psi : J \longrightarrow H_I^0(E)$ é um mapa, então ψ se estende a um mapa $R \longrightarrow H_I^0(E)$. A priori, seja J um ideal contendo alguma potência de I . Como I é finitamente gerado e cada gerador leva em um elemento que é anulado por uma potência de I (Corolário 4.2.2), temos que para d suficientemente grande o ideal $I^d J$ é o kernel de ψ . Pelo Lema 1.2.8, o ideal $I^d J$ contém um ideal da forma $I^e \cap J$. Daí, o mapa

$(\psi, 0) : J \oplus I^e \longrightarrow H_I^0(E)$ fatora o ideal $J + I^e \subseteq R$. Por abuso de notação, podemos supor que $I^e \subseteq J$. Como E é injetivo podemos estender ψ a um mapa $\psi' : R \longrightarrow M$. Uma vez que $\psi'(I^e) = \psi(I^e) \subseteq H_I^0(E)$, alguma potência de I anula $\psi'(1)$, ou seja, $\psi'(1) \in H_I^0(E)$, e ψ' estende ψ .

(b) Dados $m \in E$ e $d \in \mathbb{N}$, devemos mostrar que m/x^d está na imagem de E em $E[x^{-1}]$. Como R é Noetheriano, o anulador de x^e é igual ao anulador de x^{d+e} , se e for suficientemente grande. Dessa forma, o anulador de x^{d+e} está contido no anulador de $x^e m$. Assim, existe um mapa $(x^{d+e}) \longrightarrow M$, mandando x^{d+e} em $x^e m$. Como E é injetivo, este mapa se estende a um mapa $R \longrightarrow M$. Denotando por $m' \in E$ a imagem de 1, temos $x^{d+e} m' = x^e m$. Logo, $x^e(x^d m' - m) = 0$ e o elemento m' é levado sob o mapa de localização no elemento $m/x^d \in E[x^{-1}]$. \square

O teorema a seguir nos beneficia com uma outra expressão para a cohomologia local que provém do *complexo de Čech* que é definido no teorema a seguir.

Teorema 4.3.2. *Considere R um anel Noetheriano e $I = (x_1, \dots, x_t)$. Para qualquer R -módulo M a cohomologia local $H_I^i(M)$ é a i -ésima cohomologia de complexo (de Čech)*

$$\begin{aligned} C(x_1, \dots, x_t; M) : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d} \bigoplus_{i=1}^t M[x_i^{-1}] \xrightarrow{d} \dots \\ \dots \longrightarrow \bigoplus_{|J|=s} M[x_J^{-1}] \xrightarrow{d} \dots \longrightarrow M[x_t^{-1}] \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cujo diferencial toma cada elemento

$$m_J \in M[x_J^{-1}] \subseteq \bigoplus_{|J|=s} M[x_J^{-1}]$$

e envia no elemento

$$d(m_J) = \sum_{k \notin J} (-1)^{o_J(k)} m_{J \cup \{k\}}$$

no qual $o_J(k)$ denota o número de elementos de J menores que k e $m_{J \cup \{k\}}$ denota a imagem de m_J na localização $M[(x_{J \cup \{k\}})^{-1}] = M[x_J^{-1}][x_k^{-1}]$.

Demonstração. Um elemento $m \in M$ é levado no zero sob o diferencial $d : M \longrightarrow \bigoplus_j M[x_j^{-1}]$ se, e só se, m é anulado por alguma potência de cada x_i . Isto é o mesmo que m ser anulado por alguma potência suficientemente grande de I e dessa maneira $H^0(C(x_1, \dots, x_t; M)) = H_I^0(M)$. Como o funtor localização é exato, um sequência exata curta de módulos induz uma sequência exata curta de complexos e esta propõe uma sequência exata longa no funtores de homologia $H^i(C(x_1, \dots, x_t; M))$. Para mostrar que $H^i(C(x_1, \dots, x_t; M)) = H_I^i(M)$ provaremos que este é o funtor derivado de $H_I^0(M) = H^0(C(x_1, \dots, x_t; M))$. Para tal, basta mostrar que $H^i(C(x_1, \dots, x_t; E)) = 0$, para todo $i \geq 1$, quando E é um módulo injetivo. Faremos isso por indução em t , no qual o caso $t = 0$ é trivial. O caso $t = 1$ se reduz a mostrar que para qualquer $x \in R$ e qualquer R -módulo injetivo E o mapa de localização $E \longrightarrow E[x^{-1}]$ é sobrejetor. Mas, isto já foi provado no item (b) do Lema 4.3.1. Se $t > 1$, temos que

$$\bigoplus_{|J|=s; t \in J} E[x_J^{-1}] \subseteq \bigoplus_{|J|=s} E[x_J^{-1}]$$

para um subcomplexo isomorfo a $C(x_1, \dots, x_t; E)[x_t^{-1}][1]$, onde $[1]$ denota o deslocamento no grau homológico em 1. Como os quocientes não envolvem termos onde x_t está invertido, segue que a sequência curta de complexos

$$0 \longrightarrow C(x_1, \dots, x_{t-1}; E)[x_t^{-1}][1] \longrightarrow C(x_1, \dots, x_t; E) \longrightarrow C(x_1, \dots, x_{t-1}; E) \longrightarrow 0$$

é exata. Passando para a sequência exata longa

$$\begin{aligned} H^{i-1}(C(x_1, \dots, x_{t-1}; E)) &\xrightarrow{\delta} H^{i-1}(C(x_1, \dots, x_{t-1}; E)[x_t^{-1}]) \longrightarrow \\ &H^i(C(x_1, \dots, x_t; E)) \longrightarrow H^i(C(x_1, \dots, x_{t-1}; E)), \end{aligned}$$

o morfismo de conexão δ é apenas o mapa de localização. Uma vez que E é injetivo, para $i > 1$, a hipótese de indução nos diz que

$$H^{i-1}(C(x_1, \dots, x_{t-1}; E)) = H^{i-1}(C(x_1, \dots, x_{t-1}; E)[x_t^{-1}]) = H^i(C(x_1, \dots, x_{t-1}; E)) = 0$$

e a sequência acima nos leva a $H^i(C(x_1, \dots, x_t); E) = 0$. Se $i = 1$, o item (b) do Lema 4.3.1 impõe que o mapa $\delta : E \longrightarrow E[x_t^{-1}]$ seja sobrejetor. Sendo assim, novamente pela hipótese de indução e pela sequência acima, $H^1(C(x_1, \dots, x_t); E) = 0$, como desejávamos. \square

Corolário 4.3.3. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo e $I = (x_1, \dots, x_t) \subseteq R$. Então $H_i^i(M) = 0$, para todo $i > t$.*

Demonstração. Basta saber que o comprimento do complexo de Čech é $t > 0$ e o resultado segue do Teorema 4.3.2. \square

Exemplo 4.3.4. Seja $S = k[x, y]$ (k um corpo), $\mathfrak{m} = (x, y)$ e o S -módulo $R = S/(x^2, xy)$. Iremos calcular as cohomologias locais $H_{\mathfrak{m}}^i$ utilizando o complexo de Čech. O complexo de Čech do Teorema 4.3.2 neste caso é

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} R[x^{-1}] \oplus R[y^{-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}} R[(xy)^{-1}] \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, tanto x^2 quanto $(xy)^2$ anulam R , e dessa maneira o complexo de Čech se reduz a

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(1)} R[y^{-1}] \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

sendo que (1) é o mapa de localização. O kernel de (1) é a 0-ésima homologia do complexo de Čech que pelo Teorema 4.3.2 é $H_{\mathfrak{m}}^0(R)$.

Afirmação: $\ker(1) = (\bar{x})$.

De fato, se $g(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}$, então

$$\frac{g(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{1}} = \frac{\bar{0}}{\bar{1}}$$

pois $yxf(x, y) \in (x^2, xy)$. Logo, $(\bar{x}) \subseteq \ker(1)$. Para a outra inclusão, se

$$\frac{f(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{1}} = \frac{\bar{0}}{\bar{1}}$$

então existe $n \geq 0$ tal que $y^n f(x, y) \in (x^2, xy)$. Logo, $y^n f(x, y) = x^2 g_1 + xy g_2$, para $g_1, g_2 \in k[x, y]$. Daí, $y^n f(x, y) = x(xg_1 + yg_2)$. Portanto, $x \mid y^n f(x, y)$, porém $x \nmid y^n$. Sendo assim, $x \mid f(x, y)$ e $\ker(1) \subseteq (\bar{x})$. Temos calculado então $H_m^0 = (\bar{x}) \cong k(-1)$. Como na Afirmação acima, podemos notar o isomorfismo $R[y^{-1}] \cong S/(x)[y^{-1}]$. Dessa forma, podemos enxergar a imagem de R em $R[x^{-1}]$ como a imagem de $S/(x)$ em $S/(x)[y^{-1}]$. Então, pelo Teorema 4.3.2,

$$H_m^1(R) = \frac{S/(x)[y^{-1}]}{S/(x)} \cong (y^{-1}) \oplus (y^{-2}) \oplus \cdots \cong k(1) \oplus k(2) \oplus \cdots$$

Pelo Corolário 4.3.3, $H_m^i(R) = 0$, para $i > 2$. Ainda temos $H_m^2(R) = 0$, olhando para o complexo (4.1) e aplicando o Teorema 4.3.2.

Para módulos de comprimento finito, os módulos de cohomologia local são triviais.

Corolário 4.3.5. *Considere $S = k[x_0, \dots, x_r]$, no qual k é um corpo. Se M é S -módulo graduado de comprimento finito, e $I \subseteq S$ é um ideal, então $H_I^0(M) = M$ e $H_I^i(M) = 0$, para $i > 0$.*

Demonstração. Já temos a inclusão $H_I^0(M) \subseteq M$. Temos que mostrar que dado $m \in M$, existe $r \in \mathbb{N}$ satisfazendo $I^r m = 0$. Suponha que para todo $r \in \mathbb{N}$, $I^r m \neq 0$, então a cadeia de submódulos

$$(0) \subseteq (0 :_M I) \subseteq (0 :_M I^2) \subseteq \cdots \subseteq (0 :_M I^r) \subseteq \cdots$$

nunca estabiliza, contrariando o fato de M possuir comprimento finito. Logo, $H_I^0(M) = \Gamma_I(M) = M$. Como alguma potência de cada x_i anula M , então $M[x_i^{-1}] = 0$, para $i > 0$. Daí, o complexo de Čech $C(x_1, \dots, x_t; M)$ se reduz a

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e o corolário segue do Teorema 4.3.2. □

Mudanças de base por morfismos de anéis preservam as cohomologias locais relacionando o ideal base com seu ideal extensão.

Corolário 4.3.6. *Considere M um S -módulo graduado finitamente gerado, $I \subseteq R$ um ideal e $\varphi : R \longrightarrow R'$ um morfismo de anéis Noetherianos. Então existe um isomorfismo canônico*

$$H_I^i(M) \cong H_{IR'}^i(M).$$

Demonstração. Seja x um elemento qualquer. Afirmamos que a localização $M[x^{-1}]$ é invariante por mudanças de anel. Com efeito, por definição M_x é o conjunto dos pares ordenados (m, x^n) módulo a relação de equivalência: $(m, x^d) \sim (m, x^e)$ se, existe $f \geq 0$ tal que $x^f(x^e m - x^d m') = 0$. Dessa maneira, a mudança de anel não muda a estrutura do módulo e o complexo de Čech $C(x_1, \dots, x_t; M)$ é invariante sobre a mudança de anéis e o resultado segue do Teorema 4.3.2. □

4.4 Dualidade Local e Teorema da Nulidade

Para a demonstração da dualidade local precisamos do seguinte

Lema 4.4.1. Se $S = k[x_0, \dots, x_r]$ é o anel de polinômios em $r + 1$ indeterminadas e \mathfrak{m} é o ideal irrelevante, então $H_{\mathfrak{m}}^i(S) = 0$ para $i < r + 1$ e

$$H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S) = S(-r-1)^\vee$$

como S -módulos. Noutras palavras, o funtor dos S -módulos livres que leva F em $H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(F)$ é isomorfo ao funtor $F \mapsto \text{Hom}_S(F, S(-r-1))^\vee$.

Demonstração. Uma vez que o complexo $C(x_0, \dots, x_r; S)$ é multigraduado, trabalharemos com multigrado $\alpha \in \mathbb{Z}^{r+1}$, para mostrar que $H_{\mathfrak{m}}^i(S) = 0$, se $i < r + 1$. Considere J o conjunto dos índices $j \in \{0, \dots, r+1\}$ tais que $\alpha_j < 0$. Sendo assim, $S[x_I^{-1}]$ contém o monômio x^α se, e somente se, $J \subseteq I$ e assim

$$S[x_I^{-1}]_\alpha = \begin{cases} k, & \text{se } I \subseteq J \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere o simplexo Δ cujas faces são os subconjuntos de $K = \{0, \dots, r\} \setminus J$. Podemos notar que a parte de multigrado α de $C(x_0, \dots, x_r; S)$ é o complexo reduzido de Δ , onde a face com conjunto de índices L corresponde ao monômio x^α na componente $S[x_{J \cup L}^{-1}]$ de $C(x_0, \dots, x_r; S)$. Como a homologia reduzida de um simplexo é nula, a menos que o simplexo seja vazio, o Teorema 4.3.2 nos garante $H_{\mathfrak{m}}^i(S) = 0$, para $i < r + 1$. Em argumentos inteiramente análogos, mostramos que

$$H_{\mathfrak{m}}^r(S)_\alpha = \begin{cases} k, & \text{se cada componente de } \alpha \text{ é negativo} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

que concorda como espaço vetorial com $\text{Hom}_S(S, S(-r-1))^\vee$. Dizer que esta identificação é funtorial é o mesmo que: $f : S(d) \rightarrow S(e)$ é um mapa, então o mapa induzido $f^\vee : S(-r-1)(d)^\vee \rightarrow S(-r-1)(e)^\vee$ é o mapa $f : H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S(d)) \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S(e))$, que provém da multiplicação. Para tal, é necessário mostrar que a estrutura de módulo de $H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S)$ concorda com a estrutura de $S(-r-1)^\vee$. Como S -módulo pelo Teorema 4.3.2, $H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S)$ é o cokernel da aplicação

$$\bigoplus_{|I|=r} S[x_I^{-1}] \rightarrow S[(x_0 \cdots x_r)^{-1}].$$

Sua imagem é o espaço vetorial gerado pelos monômios x^α tal que um de seus componentes α_i de $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_r)$ é não-negativo. Dessa forma, $H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S)$ pode ser identificado com o espaço vetorial

$$(x_0 \cdots x_r)^{-1} k[x_0^{-1}, \dots, x_r^{-1}].$$

Através dessa identificação podemos descrever a estrutura de S -módulo de $H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S)$ da seguinte maneira: se $x^\beta \in S$ e $x^\alpha \in H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S)$ então

$$x^\beta x^\alpha = \begin{cases} x^{\alpha+\beta}, & \text{se todos componentes de } \alpha + \beta \text{ são negativos} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Donde, a aplicação $H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S) \rightarrow \bigoplus_d \text{Hom}_k(S_d, k)$ levando x^α no vetor dual de $x^{-\alpha}$ é um isomorfismo, como queríamos. \square

Teorema 4.4.2 (Dualidade Local). *Sejam $S = k[x_0, \dots, x_r]$ (k um corpo), M é um S -módulo graduado finitamente gerado e $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_r)$ o ideal irrelevante, então $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ é o módulo dual do S -módulo $\text{Ext}_S^{r+1-i}(M, S(-r-1))$.*

Demonstração. Seja

$$\mathcal{F}_{\bullet} : \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0$$

uma resolução livre para M . Se tensorizarmos a resolução \mathcal{F}_{\bullet} com o complexo de Čech $\mathcal{C}_{\bullet} = C(x_0, \dots, x_r; M)$ obtemos um duplo complexo. Podemos pensar nos diferenciais de \mathcal{F}_{\bullet} horizontalmente e nos diferenciais induzidos pelos diferenciais de \mathcal{C}_{\bullet} verticalmente. Sendo que o funtor localização é exato, a i -ésima homologia horizontal do duplo complexo é a i -ésima homologia de \mathcal{C}_{\bullet} que pelo Teorema 4.3.2 é $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$. Dessa forma, a i -ésima homologia total do complexo duplo $\mathcal{F}_{\bullet} \otimes \mathcal{C}_{\bullet}$ é $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$. Por outro lado, sabemos pelo Lema 4.4.1 que $H_{\mathfrak{m}}^i(F_j) = 0$, sendo $i < r+1$, logo as colunas do complexo duplo possui homologia não nula somente no fim e a homologia vertical é $H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(\mathcal{F}_{\bullet}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}_{\bullet}, S(-r-1))^{\vee}$. O fato do funtor de dualização ser exato e comutar com homologias implica que a j -ésima homologia de $\text{Hom}(\mathcal{F}_{\bullet}, S(-r-1))^{\vee}$ é $\text{Ext}_S^{r+1-j}(M, S(-r-1))^{\vee}$. Sendo assim, a homologia total do complexo $\mathcal{F}_{\bullet} \otimes \mathcal{C}_{\bullet}$ é $\text{Ext}_S^{r+1-j}(M, S(-r-1))^{\vee}$, donde segue o teorema. \square

Exemplo 4.4.3. Considere a mesma notação do Exemplo 4.3.4. Dessa vez calcularemos as cohomologias locais $H_{\mathfrak{m}}^i(R)$ através da dualidade local. Uma resolução livre de R é

$$0 \longrightarrow S(-3) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} S^2(-2) \begin{pmatrix} x^2 & xy \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} S \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Os módulos $\text{Ext}_S^i(M, S(-2))$ são as homologias do complexo dual deslocado por -2 , isto é

$$0 \longrightarrow S(-2) \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} S^2 \begin{pmatrix} y & -x \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} S(1) \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Daí, $\text{Ext}_S^0(M, S(-2)) = 0$. Também,

$$\text{Ext}_S^2(M, S(-2)) = S/(x, y)(1) \cong k(1).$$

Para calcular $\text{Ext}_S^1(M, S(-2))$, observe que

$$\text{Ext}_S^1(M, S(-2)) = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / S \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} \cong S/(x)(-1) \cong k(-1) \oplus k(-2) \oplus \dots$$

O Teorema 4.4.2 nos diz que

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{m}}^0(R) &= \text{Ext}_S^2(M, S(-2))^{\vee} = k(1)^{\vee} = k(-1) \\ H_{\mathfrak{m}}^1(R) &= \text{Ext}_S^1(M, S(-2))^{\vee} = (k(1) \oplus k(2) \oplus \dots)^{\vee} = k(-1) \oplus k(-2) \oplus \dots \\ H_{\mathfrak{m}}^2(R) &= \text{Ext}_S^0(M, S(-2))^{\vee} = 0^{\vee} = 0 \end{aligned}$$

e ainda $H_{\mathfrak{m}}^i(R) = 0$, para $i > 2$ pelo Corolário 4.3.3.

A próxima proposição explica em termos de cohomologia local a distância entre a função de Hilbert e seu polinômio. A demonstração utiliza a teoria cohomologia de feixes que infelizmente não será abordada nessa dissertação. O leitor interessado em uma demonstração veja [12].

Proposição 4.4.4. *Sejam k um corpo, $S = k[x_0, \dots, x_r]$ e M um S -módulo graduado finitamente gerado. Então, para todo $d \in \mathbb{Z}$,*

$$p_M(d) = h(M, d) - \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H_{\mathfrak{m}}^i(M)_d.$$

Observação 4.4.5. Daqui para frente, nossa consideração geral será M um módulo graduado finitamente gerados sobre o anel de polinômios $S = k[x_0, \dots, x_r]$, sendo k um corpo e $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_r)$ o ideal irrelevante. Pela similaridade com o caso de anéis locais, escreveremos $\text{depth } M$ no lugar de $\text{grade}(\mathfrak{m}, M)$.

Teorema 4.4.6 (Nulidade). *Considere k um corpo, $S = k[x_0, \dots, x_r]$ e M um S -módulo graduado finitamente gerado. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *Se $i < \text{depth } M$ ou $i > \dim M$, então $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$;*
- (b) *Se $i = \text{depth } M$ ou $i = \dim M$, então $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq 0$;*
- (c) *Existe um inteiro d (que depende de M) tal que $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_d = 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.4.2, $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$, para $i > \text{depth } M$ é equivalente a

$$\text{Ext}_S^j(M, S(-r-1)) = 0 \quad (4.2)$$

para $j > r+1 - \text{depth } M$. Porém, como S é Cohen-Macaulay e $\dim S = r+1$, o Teorema 2.3.10 nos informa que $\text{pd}_S(M) = r+1 - \text{depth } M$ e assim a equação (4.2) é verdadeira pela definição de dimensão projetiva. Quando $j = \text{pd}_S(M)$, o módulo $\text{Ext}_S^j(M, S(-r-1))$ é o dual do cokernel do último mapa em uma resolução livre minimal de M . A minimalidade da resolução implica que as entradas da matriz que representa este mapa está em \mathfrak{m} . Logo, pelo Lema 1.1.12 o cokernel deste mapa é não nulo, e desse modo $\text{Ext}_S^j(M, S(-r-1)) \neq 0$. Como $\text{pd}_S(M) = r+1 - \text{depth } M$, novamente pelo Teorema 4.4.2 obtemos $H_{\mathfrak{m}}^{\text{depth } M} \neq 0$. Como no caso da profundidade, temos que $H_{\mathfrak{m}}^i = 0$, para $i > \dim M$ é o mesmo que $\text{Ext}_S^j(M, S(-r-1)) = 0$, para $j > \dim S - \dim M = \text{codim } M = \text{codim ann}_S M$. Como S é Cohen-Macaulay, o $\text{depth}(\text{ann}_S M, S) = \text{codim ann}_S M$. Mostraremos que $\text{Ext}_S^j(M, N)$, se $j < d = \text{depth}(\text{ann}_S M, N)$, para qualquer módulo Noetheriano N . Faremos isso utilizando indução sobre d , sendo que o caso $d = 0$ é trivial, pois assim $j < 0$. Se $d > 0$, escolha $x \in \text{ann } M$ elemento N -regular. A sequência exata

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{x} N \longrightarrow N/xN \longrightarrow 0$$

induz nova sequência exata longa de módulos

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_S^{j-1}(M, N/xN) \longrightarrow \text{Ext}_S^j(M, N) \xrightarrow{\varphi} \text{Ext}_S^j(M, N).$$

Pela Proposição 2.2.5, φ é nulo e assim $\text{Ext}_S^{j-1}(N, M/xM) \cong \text{Ext}_S^j(N, M)$. Uma vez que pela Proposição 2.2.14, $\text{depth}(\text{ann}_S M, N/xN) = \text{depth } N - 1$, segue por hipótese de indução o desejado. Para finalizar a parte (b), falta mostrar que $\text{Ext}_S^j(M, S(-r-1)) \neq 0$, para $j = \text{codim } M$.

Escolha um ideal primo $P \in S$ minimal em $\text{ann}M$ tal que $\text{coht}P = \text{codim } M$. Como funtores derivados comutam com localização, é suficiente mostrar que $\text{Ext}_{S_P}^j(M_P, S(-r-1)_P) \neq 0$ se M_P possui comprimento finito e $j = \text{codim } M_P$. Mas, como M_P possui comprimento finito então $\dim M_P = 0$. Além disso, pelo item (b) do Teorema 2.4.7, S_P é Cohen-Macaulay e assim $\text{codim } M_P = \dim S_P - \dim M_P = \text{depth } S_P$ e o resultado segue, pois já mostramos para o caso da profundidade. Para terminar, provar o item (c) é equivalente a provar que se d é suficientemente negativo, a componente de grau d do módulo $E = \text{Ext}_S^j(M, S(-r-1))$ é nula. Para isso, basta tomar d menor do que o grau dos finitos geradores de E . \square

Exemplo 4.4.7. Seja $S = k[x_0, \dots, x_r]$, onde k é um corpo e \mathfrak{m} o ideal irrelevante. O Teorema 4.4.6, nos diz que $H_{\mathfrak{m}}^i(S) = 0$, para $j < r+1$ e $j > r+1$. Como na demonstração do Lema 4.4.1, temos

$$H_{\mathfrak{m}}^{r+1}(S) = (x_0 \cdots x_r)^{-1} k[x_0^{-1}, \dots, x_r^{-1}].$$

Capítulo 5

A Regularidade de Castelnuovo-Mumford

A regularidade de Castelnuovo-Mumford de um ideal no anel de polinômios com entradas em um corpo é um importante invariante que mede a complexidade do ideal. A noção de regularidade permitiu que Kleiman provasse que, se I é um ideal reduzido equidimensional em um anel de polinômios sobre um corpo algebricamente fechado S , então os coeficientes do polinômio de Hilbert de S/I pode ser limitado por sua dimensão e sua multiplicidade. Não chegaremos a provar tal fato, pois sua prova é bastante difícil e envolve resultados profundos de geometria algébrica. Aqui, introduziremos a noção de regularidade através dos deslocamentos de resoluções livres. Daremos mais uma resposta, agora envolvendo a regularidade da pergunta: quando a função de Hilbert passa a ser um polinômio? Depois, daremos várias caracterizações da regularidade, principalmente utilizando cohomologia local. Além disso, veremos que o cálculo da regularidade pode ser feito utilizando os funtores torção e de elementos quase-regulares. Finalmente, daremos ênfase aos casos de módulos Artinianos e de Cohen-Macaulay, exibindo maneiras mais simples de calcular a regularidade.

5.1 Definição de Regularidade por Sizígias

Considere $S = k[x_0, \dots, x_r]$ e um complexo graduado de S -módulos livres

$$\mathcal{F}_\bullet : \dots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \dots$$

com $F_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})$. A *regularidade de Castelnuovo-Mumford de \mathcal{F}_\bullet* ou simplesmente *regularidade de \mathcal{F}_\bullet* é o supremo dos números $a_{i,j} - i$. Se M é um S -módulo finitamente gerado, a *regularidade de M* é a regularidade de uma resolução livre graduada minimal de M , e denotaremos $\text{reg} M$.

Exemplo 5.1.1. Se M é livre, então a regularidade de M é o supremo dos números $a_{0,j} - 0$. Noutras palavras, a regularidade de M é o supremo dos graus de um conjunto minimal de geradores homogêneos de M .

Exemplo 5.1.2. Com a mesma notação do Exemplo 3.1.1 vimos que a resolução

$$0 \longrightarrow S^2(-3) \longrightarrow S^3(-2) \longrightarrow S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre graduada minimal de S/I . Com isso temos que

$$\operatorname{reg} S/I = \max\{1 - 0, 2 - 1, 3 - 2\} = 1.$$

Uma ilustração de como a regularidade de Castelnuovo-Mumford é utilizada está na pergunta: quando a função de Hilbert se torna polinomial? Mostraremos que a regularidade de M nos dá uma limitação de quando a função de Hilbert vem a concordar com o seu polinômio.

Teorema 5.1.3. *Seja M um módulo graduado finitamente gerado sobre o anel de polinômios $S = k[x_0, \dots, x_r]$, sendo k um corpo. Se $\operatorname{pd}_S(M) = \delta$, então a função de Hilbert $h(M, d)$ concorda com seu polinômio de Hilbert para $d \geq \operatorname{reg} M + \delta - r$.*

Demonstração. Por hipótese, podemos considerar uma resolução livre graduada minimal da forma

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j S(-a_{\delta,j}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_j S(-a_{0,j}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e dessa maneira, $\operatorname{reg} M = \max\{a_{i,j} - i\}$. Pela Proposição 3.1.2, a função de Hilbert é dada pela fórmula

$$h(M, d) = \sum_{i,j} (-1)^i \binom{d - a_{i,j} - r}{r}$$

Como no Corolário 3.1.3, se $d \geq a_{i,j} - r$, então

$$\binom{d - a_{i,j} + r}{r}$$

é um polinômio binomial de grau r . Portanto, $d \geq \operatorname{reg} M + \delta - r$ implica que $d \geq a_{i,j} - i + \delta - r \geq a_{i,j} - r$, para cada $a_{i,j}$ no qual $i \leq \delta$. Dessa forma, segue que se $d \geq \operatorname{reg} M + \delta - r$,

$$h(M, d) = \sum_{i,j} (-1)^i \binom{d - a_{i,j} - r}{r} = p_M(d).$$

□

Utilizando o Teorema das Sizíguas de Hilbert (Teorema 3.3.9), podemos ainda melhorar a limitação dada no Teorema 5.1.3.

Corolário 5.1.4. *Seja M um módulo graduado finitamente gerado sobre o anel de polinômios $S = k[x_0, \dots, x_r]$, sendo k um corpo. Então a função de Hilbert $h(M, d)$ concorda com seu polinômio de Hilbert para $d \geq \operatorname{reg} M + 1$.*

Demonstração. Ponha $\operatorname{pd}_S(M) = \delta$. O Teorema 3.3.9 nos diz que $\delta \leq r + 1$, ou seja, $\delta - r \leq 1$. Portanto, se $d \geq \operatorname{reg} M + 1 \geq \operatorname{reg} M + \delta - r$, o Teorema 5.1.3 nos garante a igualdade

$$h(M, d) = p_M(d).$$

□

5.2 Regularidade por Cohomologia Local

A seguir, veremos a noção de d -regularidade no sentido de Castelnuovo para o caso de módulos.

Definição 5.2.1. Dizemos que um módulo M é d -regular ($d \in \mathbb{Z}$), se:

- (a) $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} = 0$, para todo $i > 0$;
- (b) $d \geq \text{reg} H_{\mathfrak{m}}^0(M)$.

Se M satisfaz apenas a condição (a), dizemos que M é *fracamente* d -regular.

Definição 5.2.2. Seja M um S -módulo finitamente gerado. Dizemos que $x \in S$ é *elemento quase-regular sobre* M se

$$(0 :_M x) = \{m \in M : xm = 0\}$$

possui comprimento finito como S -submódulo de M .

Observação 5.2.3. Seja $x \in S$ um elemento M -regular. A definição de elemento regular nos diz que $(0 :_M x) = 0$, que possui comprimento igual a zero, e trivialmente todo elemento regular é quase-regular.

Podemos caracterizar a d -regularidade olhando para quocientes por elementos quase-regulares e o 0-ésimo módulo de cohomologia local.

Proposição 5.2.4. Suponha que M é um S -módulo graduado finitamente gerado e que $x \in S$ é elemento quase-regular sobre M . Então,

- (a) Se M é fracamente d -regular, então M/xM também o é;
- (b) Se M é (fracamente) d -regular, então M é (fracamente) $d + 1$ -regular;
- (c) M é d -regular se, e somente se, M/xM é d -regular e $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ é d -regular.

Demonstração. (a) Denote $M' = M/(0 :_M x)$ e considere sequência exata

$$0 \longrightarrow (0 :_M x) \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0.$$

Passando para a sequência exata longa de cohomologia local, obtemos

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(0 :_M x) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M') \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(0 :_M x) \longrightarrow \cdots$$

Por hipótese, $(0 :_M x)$ possui comprimento finito, logo pelo Corolário 4.3.5,

$$H_{\mathfrak{m}}^i(0 :_M x) = H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(0 :_M x) = 0$$

para todo $i > 0$. Assim, $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M')$, para todo $i > 0$. Considere agora, a sequência exata

$$0 \longrightarrow M'(-1) \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

onde $M'(-1) \xrightarrow{x} M$ é a aplicação induzida pela multiplicação por x . A sequência (5.1) induz sequência exata longa de cohomologia local

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM)_{d-i+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M'(-1))_{d-i+1} \longrightarrow \cdots$$

Como $H_{\mathfrak{m}}^i(M'(-1))_{d-i+1} = H_{\mathfrak{m}}^i(M')_{d+i} \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d+i}$ e por hipótese M é fracamente d -regular, temos que $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} = H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M)_{d+i}$, para todo $i > 0$. Daí, $H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM)_{d-i+1} = 0$, para todo $i > 0$ e M/xM é fracamente d -regular.

(b) Suponha que M é fracamente d -regular. Provaremos por indução em $\dim M$ que M é fracamente $(d+1)$ -regular. Se $\dim M = 0$, então M possui comprimento finito, logo pelo Corolário 4.3.5, $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$, para todo $i > 0$ e assim M é e -regular, para qualquer e . Suponha então $\dim M > 0$.

Afirmção: $\dim(M/xM) = \dim M - 1$.

Para tal, considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow (0 :_M x) \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0.$$

Por hipótese $(0 :_M x)$ possui comprimento finito, então para $n \gg 0$, temos sequência exata

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow (M/xM)_n \longrightarrow 0.$$

Pela Proposição 1.3.10,

$$\ell_k((M/xM)_d) = \ell_k(M_{d+1}) - \ell_k(M_d)$$

ou seja, $h(M/xM) = \Delta h(M, n)$. Dessa forma, pelo Teorema 1.3.12 e pela Proposição 1.3.5, temos que $\dim(M/xM) = \dim M - 1$.

Pelo item (a) M/xM também é fracamente d -regular. Por hipótese de indução, M/xM é fracamente $d+1$ -regular. A sequência (5.1), induz sequência exata

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M'(-1))_{(d+1)-i+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{(d+1)-i+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M/xM)_{(d+1)-i+1} \longrightarrow \cdots$$

Como no item (a), $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} = H_{\mathfrak{m}}^i(M'(-1))_{(d+1)-i+1}$ e o primeiro termo da sequência se anula, pois M é fracamente d -regular. O terceiro termo também se anula uma vez que M/xM é fracamente $d+1$ -regular. Logo, $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{(d+1)-i+1} = 0$, e portanto M é fracamente $(d+1)$ -regular. Além disso,

$$d+1 > d \geq \operatorname{reg} H_{\mathfrak{m}}^0(M)$$

e assim M é $(d+1)$ -regular também.

(c) Suponha que M é d -regular. Daí, $d \geq \operatorname{reg} H_{\mathfrak{m}}^0(M)$, ou seja, $H_{\mathfrak{m}}^0(M)_e = 0$, para todo $e > d$ e então $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ é d -regular. Novamente pela sequência (5.1), conseguimos

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(M)_e \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(M/xM)_e \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^1(M'(-1))_e \longrightarrow \cdots$$

Se $e > d$, por hipótese $H_{\mathfrak{m}}^0(M)_e = 0$. Novamente, $H_{\mathfrak{m}}^1(M'(-1))_e = H_{\mathfrak{m}}^1(M)_{e-1}$, e o termo da direita também se anula, provando que M/xM é d -regular. Do outro lado, suponha que M/xM é d -regular e $H_{\mathfrak{m}}^0(M) = 0$. Falta mostrar que $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} = 0$, para todo $i > 0$. Outra vez, passando pela sequência (5.1) conseguimos sequência exata longa de cohomologia local

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(M/xM)_{e+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M')_e \xrightarrow{\varphi_e} H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{e+1} \longrightarrow \cdots$$

isso pois, $H_{\mathfrak{m}}^i(M'(-1))_{e+1} = H_{\mathfrak{m}}^i(M')_e$. Uma vez que M/xM é d -regular, utilizando indutivamente o item (b), segue que M/xM é d -regular, para todo $e \geq d$. Dessa forma, para todo $e \geq d - i + 1$, o primeiro termo se anula implicando na injetividade de φ_e . Como no item (a), $H_{\mathfrak{m}}^i(M') \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$, para todo $i > 0$, obtemos uma sequência de monomorfismos

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+2} \longrightarrow \cdots$$

induzida pela multiplicação por x em $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$. Pelo Lema 4.2.2, qualquer elemento em $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ é anulado por alguma potência de x , portanto a composição destes morfismos se anula. Por injetividade, temos então que $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} = 0$, para todo $i > 0$. Finalizando assim a demonstração. \square

O seguinte resultado nos auxiliará na demonstração do teorema principal.

Lema 5.2.5. *Seja M um S -módulo graduado finitamente gerado e suponha que o corpo base k de S seja infinito. Então existe uma forma linear (grau 1) $x \in S$ que é elemento quase-regular sobre M .*

Demonstração. Primeiramente, o módulo possui comprimento finito se, e só se, $S/\text{ann}(0 :_M x)$ é Artiniano, o que equivale a dizer que, $\text{ann}(0 :_M x)$ não está contido em nenhum ideal primo que não é maximal. Isto significa que, para todo ideal primo não-maximal P , $(0 :_M x)_P = 0$, que pelo Corolário 2.1.10 quer dizer que x é regular em M_P . Dessa maneira, é suficiente mostrar que x não está em nenhum ideal primo associado de M , que não é maximal. Para isso, cada ideal primo não-maximal P intersecta S_1 em um subespaço próprio, pois caso contrário, $\mathfrak{m} \subseteq P$ e $P = \mathfrak{m}$, por maximalidade. Como o conjunto dos primos associados de M é finito, x satisfaz a propriedade requerida se este está fora de um número finito de subespaços próprios. Mas isto acontece exatamente pela hipótese de que k é um corpo infinito. \square

Chegamos no teorema principal desta seção e tudo que foi visto até aqui será necessário para prová-lo. Como consequência, conseguiremos caracterizar a regularidade de Castelnuovo-Mumford em termos de cohomologia local.

Teorema 5.2.6. *Sejam M um S -módulo graduado finitamente gerado e d um número inteiro. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $d \geq \text{reg}M$;
- (b) $d \geq \max\{e : H_{\mathfrak{m}}^i(M)_e \neq 0\} + i$, para todo $i \geq 0$;
- (c) $d \geq \max\{e : H_{\mathfrak{m}}^0(M)_e \neq 0\}$ e $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} = 0$, para todo $i > 0$.

Demonstração. Assuma a hipótese (a). Argumentando por indução em $\text{pd}_S(M)$ provaremos (b). Se $\text{pd}_S(M) = 0$, então M possui resolução livre trivial e podemos escrever $M = \bigoplus_j S(-a_j)$. Dessa maneira, $\text{reg}M = \max\{a_j : j \geq 0\}$. Daí, pelo Lema 4.4.1 M é d -regular se, e só se, $d \geq a_j$, para todo j . Daí, $d \geq a_j$ para todo j , implica que M é d -regular, isto é, $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d-i+1} = 0$, para todo $i > 0$ e $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d+1} = 0$ e assim, $d \geq \max\{e : H_{\mathfrak{m}}^i(M)_e \neq 0\} + i$, para todo $i \geq 0$. Agora, suponha $\text{pd}_S(M) > 0$ e seja

$$\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre minimal de M . Seja $M' = \text{Im} \varphi_1$ o primeiro módulo de sizígias de M .

Afirmção 1: $\text{reg} M' \leq \text{reg} M + 1$.

De fato, se $L_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})^{\beta_{i,j}}$ então

$$\begin{aligned} \text{reg} M' &= \max\{a_{i,j} - i : i \geq 1, j \geq 0\} \\ &\leq \max\{a_{i,j} - i : i, j \geq 0\} + 1 \\ &= \text{reg} M + 1. \end{aligned}$$

Afirmção 2: M' é $(d+1)$ -regular.

Temos por construção $\text{pd}_S(M') < \text{pd}_S(M)$ e por indução se $e \geq \text{reg} M'$, então M' é e -regular. Mas, pela Afirmção 1, $d \geq \text{reg} M \geq \text{reg} M' - 1$ e assim M' é $(e+1)$ -regular para todo $e \geq d$. Considere agora a sequência exata

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e passe pela parte de grau $e \geq d$ na sequência exata longa de cohomologia local

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(L_0)_{e-i+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{e-i+1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M')_{e-i+1} \longrightarrow 0$$

Como visto no começo da demonstração L_0 é e -regular, portanto o primeiro termo se anula para todo $i \geq 0$. Mais ainda, a Afirmção 2 nos diz que $H_{\mathfrak{m}}^i(M')_{(e+1)-i+1} = 0$, para todo $i \geq 0$. Portanto, $0 = H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M')_{(e+1)-(i+1)+1} = H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(M)_{e-i+1}$. Assim, M é e -regular para todo $e \geq d$, conseguindo que $d \geq \max\{e : H_{\mathfrak{m}}^i(M)_e \neq 0\} + i$, para todo $i \geq 0$.

Assumindo (b) é fácil provar (c). Se (b) é verdade, em particular para $i = 0$, $d \geq \max\{e : H_{\mathfrak{m}}^i(M)_e \neq 0\}$. Se $i > 0$, nomeando $f = \max\{e : H_{\mathfrak{m}}^i(M)_e \neq 0\}$, temos $d - i \geq f$ e por passagem a sequência exata longa de cohomologia local conseguimos $H_{\mathfrak{m}}^i(M)_{d+1-i} = 0$.

Dessa vez assuma a hipótese (c), isto é, M é d -regular. Devemos mostrar que $d \geq \text{reg} M$. Considere a extensão de k ao corpo infinito $k(x)$ (corpo de frações do anel de polinômios $k[x]$). Como extensão do corpo base comuta com cohomologia local, podemos supor sem perda de generalidade que k é infinito. Seja

$$\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre minimal. Argumentaremos por indução sobre $\text{pd}_S(M)$. Se $\text{pd}_S(M) = 0$, então M é livre, e assim devemos mostrar que cada gerador de M possui grau no máximo d . Para esse caso, precisamos de mais uma indução, dessa vez em $\dim M$. Sendo $\dim M = 0$, então M possui comprimento finito, temos pela d -regularidade de M e o Corolário 4.3.5 que

$$M_e = H_{\mathfrak{m}}^0(M)_e = 0$$

para todo $e > d$. Suponha $\dim M > 0$ e denote $M' = M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)$. Da sequência exata curta

$$0 \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^0(M) \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

basta mostrar que os geradores de $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ e M' possuem grau no máximo d . Para $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ isso já é verdade pela d -regularidade, pois $H_{\mathfrak{m}}^0(M)_e = 0$, para todo $e > d$. Pelo Lema 5.2.5, podemos

escolher uma forma linear x que é elemento quase-regular sobre M' , e pela Proposição 5.2.4 segue que M'/xM' é d -regular. Pela Afirmação da Proposição 5.2.4 temos $\dim M'/xM' = \dim M' - 1$. Por hipótese de indução, M'/xM' é gerado por elementos de grau no máximo d , o mesmo valendo para $M'/\mathfrak{m}M'$. Daí, pelo Lema 1.1.12, os geradores de M' também possuem grau no máximo d . Suponha então $\text{pd}_S(M) > 0$, pondo $M'' = \text{Im}\varphi_1$ o primeiro módulo de sizígias de M . Da sequência exata

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

passando pela sequência exata longa de cohomologia local temos que M'' é $(d+1)$ -regular. A hipótese de indução nos concede $\text{reg}M'' \leq d+1$. Isto significa que a parte da resolução livre minimal de M começa em L_1 e satisfaz exatamente as condições que implicam $\text{reg}M \leq d$. \square

A seguir, veremos várias maneiras de caracterizar a regularidade de Castelnuovo-Mumford. A primeira, como prometido, é uma nova forma de defini-la sobre a noção de d -regularidade. Mais precisamente, a regularidade é o mínimo dos números inteiros em que o módulo é regular.

Corolário 5.2.7. *Considere M um S -módulo finitamente graduado gerado. Então*

$$\text{reg}M = \min\{d : M \text{ é } d\text{-regular}\}.$$

Demonstração. Para provar isso é suficiente mostrar a seguinte

Afirmação: Seja d um inteiro. Então M é d -regular se, e somente se, $d \geq \text{reg}M$.

Basta perceber que $d \geq \text{reg}H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ se, e só se, $H_{\mathfrak{m}}^0(M)_e = 0$, para todo $e > d$. Então, a condição (c) é equivalente a dizer que M é d -regular. Dessa forma, o resultado segue da equivalência entre os itens (a) e (c) no Teorema 5.2.6. \square

Podemos calcular a regularidade de M através da regularidade dos módulos de cohomologia local.

Corolário 5.2.8. *Considere M um S -módulo finitamente graduado gerado. Então,*

$$\text{reg}M = \max\{\text{reg}H_{\mathfrak{m}}^i(M) + i : i \geq 0\}.$$

Demonstração. Segue da equivalência entre (a) e (b) no Teorema 5.2.6. \square

Também podemos calcular a regularidade utilizando elementos quase-regulares.

Corolário 5.2.9. *Sejam M um S -módulo finitamente graduado gerado e x um elemento quase-regular, então*

$$\text{reg}M = \max\{\text{reg}H_{\mathfrak{m}}^0(M), \text{reg}M/xM\} = \max\{\text{reg}(0 :_M x), \text{reg}M/xM\}$$

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.6, $d \geq \text{reg}M$ se, e só se, M é d -regular. Isso é o mesmo que dizer M/xM é d -regular e $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ é d -regular, donde segue a primeira igualdade. Para outra igualdade, primeiro temos que $\text{reg}(0 :_M x) \leq \text{reg}H_{\mathfrak{m}}^0(M)$, pois $(0 :_M x) \subseteq H_{\mathfrak{m}}^0(M)$. Agora, se $f \in H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ é um elemento não-nulo de grau $\text{reg}H_{\mathfrak{m}}^0(M)$, este possui grau maximal e assim $xf = 0$. Logo, $\text{reg}(0 :_M x) \geq \text{reg}H_{\mathfrak{m}}^0(M)$. \square

5.3 O Caso Artiniano

No caso específico em que o módulo é Artiniano (possui comprimento finito) podemos definir a regularidade de Castelnuovo-Mumford como sendo o menor inteiro em que sua parte homogênea da graduação se anula.

Proposição 5.3.1. *Se M é um S -módulo graduado finitamente gerado possuindo comprimento finito, então*

$$\operatorname{reg} M = \max\{d : M_d \neq 0\}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 4.3.5 temos $H_m^0(M) = M$ e $H_m^i(M) = 0$, para todo $i > 0$. Por outro lado, o Teorema 5.2.6 nos diz que $d \geq \operatorname{reg} M$ se, e só se, M é d -regular, ou seja, $M_e = H_m^0(M)_e = 0$, para todo $e > d$, donde segue o resultado. \square

A proposição acima nos permite definir a regularidade de Castelnuovo-Mumford para módulos Artinianos apenas olhando para sua estrutura graduada. Poderíamos ter definido a regularidade como segue: seja $M = \bigoplus M_d$ um S -módulo graduado então a *regularidade de Castelnuovo-Mumford de M* é o número

$$\operatorname{reg} M = \max\{d : M_d \neq 0\}.$$

Dado $t \in \mathbb{N}$, existem várias maneiras de encontrar módulos com regularidade igual a t . Uma dela está no seguinte

Exemplo 5.3.2. Considere k um corpo. A \mathbb{N} -graduação usual de $k[x]$ é

$$k[x] = k \oplus kx \oplus kx^2 \oplus \cdots \oplus kx^n \oplus \cdots$$

Então a \mathbb{N} -graduação usual de $M_1 = k[x]/(x^2)$ é dada por

$$M_1 = k \oplus k\bar{x}$$

Como M_1 é Artiniano, pela Proposição 5.3.1, segue que $\operatorname{reg} M_1 = 1$. Mais geralmente, $M_t = k[x]/(x^{t+1})$ é Artiniano e sua \mathbb{N} -graduação usual é dada por

$$M_t = k \oplus k\bar{x} \oplus k\bar{x}^2 \oplus \cdots \oplus k\bar{x}^t$$

Dessa forma, utilizando a Proposição 5.3.1, obtemos $\operatorname{reg} M_t = t$.

Outra maneira de fazer cálculos de regularidade é pensar na regularidade de módulos torção.

Proposição 5.3.3. *Seja M um S -módulo graduado finitamente gerado. Então, temos a seguinte igualdade*

$$\operatorname{reg} M = \max_{i \geq 0} \{\operatorname{reg} \operatorname{Tor}_i^S(M, k) - i\}.$$

Demonstração. Considere

$$\mathcal{F}_\bullet : \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

uma resolução livre minimal para M , com $F_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})$. Os módulos $\operatorname{Tor}_i^S(M, k) = F_i/\mathfrak{m}F_{i-1}$ são k -espaços vetoriais de dimensão finita e em especial, módulos de comprimento finito. Por definição, os números $a_{i,j}$ são os graus dos geradores de F_i , e pelo Lema 1.1.12, estes

também são elementos não-nulos em $\text{Tor}_i^S(M, k)$. Portanto, $\text{reg Tor}_i^S(M, k) - i = \max_j \{a_{i,j}\} - i$, o que implica

$$\max_i \{\text{reg Tor}_i^S(M, k) - i\} = \max_i \{\max_j \{a_{i,j}\} - i\} = \text{reg } M.$$

□

A Proposição 5.3.1 nos mostra uma certa independência do anel de definição do módulo (que possui comprimento finito), no sentido que apenas olhamos para sua estrutura graduada. O próximo resultado nos permite mudar o anel base por um morfismo graduado de anéis gerados por formas lineares e o valor da regularidade permanece o mesmo.

Notação: Para melhor expressar a próxima proposição denotaremos por $\text{reg}_S M$ a regularidade de Castelnuovo-Mumford de M visto como S -módulo.

Proposição 5.3.4. *Seja M um S -módulo graduado finitamente gerado e $\varphi : S' \rightarrow S$ um morfismo graduado de anéis gerados por formas lineares (elementos de grau 1). Se M também é S' -módulo (via φ) finitamente gerado, então $\text{reg}_S M = \text{reg}_{S'} M$.*

Demonstração. M é S' -módulo finitamente gerado se, e somente se, S é um S' -módulo (via restrição de escalares) finitamente gerado. Isto é equivalente ao ideal irrelevante em S ser nilpotente módulo o ideal gerado pelo ideal irrelevante em S' e o anulador de M . Pelo Corolário 4.3.6, a cohomologia local de M com respeito ao ideal maximal de S' é a mesma com respeito ao ideal maximal de S . Logo, pelo Teorema 5.2.6 segue que o valor da regularidade é o mesmo nos dois casos. □

5.4 O Caso Cohen-Macaulay

Voltemos a pergunta proposta na seção 5.1: quando a função de Hilbert se torna polinomial? O Corolário 5.1.4 nos fornece uma limitação a partir da regularidade. No caso em que o módulo é Cohen-Macaulay podemos ser mais profundos: qual o menor número inteiro que faz a função de Hilbert tornar-se polinomial? Mostraremos que a resposta esta relacionada com a regularidade junto com a profundidade do módulo em questão.

Proposição 5.4.1. *Seja M um S -módulo graduado finitamente gerado Cohen-Macaulay. Se s é o menor número inteiro tal que $h(M, d) = p_M(d)$, para todo $d \geq s$, então*

$$s = \text{reg } M - \text{depth } M + 1.$$

Demonstração. Por hipótese $\dim M = \text{depth } M$, e assim os item (a) e (b) do Teorema 4.4.6 nos diz que o único módulo não-nulo de cohomologia local é $H_{\mathfrak{m}}^{\text{depth } M}(M)$. Dessa forma a Proposição 4.4.4 nos revela que s é o menor número inteiro tal que $H_{\mathfrak{m}}^{\text{depth } M}(M)_d = 0$, para todo $d \geq s$ e a equivalência entre (a) e (c) no Teorema 5.2.6 nos garante que $s = \text{reg } M - \text{depth } M + 1$. □

Veremos mais a frente, no caso em que o módulo é Cohen-Macaulay, que a regularidade pode ser calculada olhando para a estrutura graduada do módulo que é resultado do quociente por uma sequência maximal. Para isso, comecemos com um

Lema 5.4.2. *Sejam M um S -módulo graduado finitamente e x forma linear M -regular. Então $\operatorname{reg} M = \operatorname{reg} M/xM$.*

Demonstração. Por hipótese, $\operatorname{depth} M \geq 1$, e assim pelo Teorema 4.2.4, $H_{\mathfrak{m}}^0(M) = 0$. Desta forma, o resultado segue utilizando o item (c) da Proposição 5.2.4 e o Corolário 5.2.7. \square

Teorema 5.4.3. *Sejam M um S -módulo graduado finitamente gerado Cohen-Macaulay e x_1, \dots, x_t uma M -sequência maximal de formas lineares. Então*

$$\operatorname{reg} M = \max\{d : (M/(x_1, \dots, x_t)M)_d \neq 0\}.$$

Demonstração. Utilizando indutivamente o Lema 5.4.2 temos que

$$\operatorname{reg} M = \operatorname{reg} M/(x_1, \dots, x_t)M.$$

Além disso, o Teorema 2.2.18 junto com a hipótese de M ser Cohen-Macaulay nos revelam que

$$\dim(M/(x_1, \dots, x_t)M) = \dim M - t = \dim M - \operatorname{depth} M = 0.$$

Assim, $M/(x_1, \dots, x_t)M$ possui comprimento finito e o resultado segue da Proposição 5.3.1. \square

Utilizando o Teorema acima, fica fácil de calcular a regularidade do anel de polinômios.

Exemplo 5.4.4. Sejam k um corpo, $S = k[x_0, \dots, x_r]$. Veremos que $\operatorname{reg} S = 0$. De fato, pelo Exemplo 2.1.4, a sequência x_0, \dots, x_r é uma sequência maximal de formas lineares em S . Além disso, $S/(x_0, \dots, x_r) \cong k$. Daí, do Teorema 5.4.3, segue que

$$\operatorname{reg} S = \max\{d : k_d \neq 0\} = 0.$$

Capítulo 6

Apêndice

Faremos aqui um simples apanhado de álgebra homológica que se faz necessário para uma melhor compreensão desta dissertação. As demonstrações dos resultados podem ser encontrados na maioria dos livros de álgebra homológica. Para mais detalhes sugerimos a referência [17] ou ainda as referências [1] e [2].

6.1 Módulos Projetivos e Injetivos

Definição 6.1.1. Seja R um anel. Um R -módulo P é dito ser *projetivo*, se para qualquer R -módulo N e quaisquer morfismos $f : P \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow N$, com g sobrejetor, então existe morfismo $h : P \rightarrow M$ (não necessariamente único) tal que $f = g \circ h$.

Apesar da definição ser uma condição um tanto “obscura”, por exemplo módulos livres a satisfaz.

Proposição 6.1.2. *Todo módulo livre é projetivo.*

A próxima proposição caracteriza módulos projetivos e nos dá mais ferramentas para encontrar exemplos desses módulos.

Proposição 6.1.3. *Se R é um anel e P é um R -módulo, então as afirmações abaixo se equivalem:*

- (a) P é projetivo;
- (b) O funtor $\text{Hom}_R(P, -)$ é exato;
- (c) P é um somando direto de um módulo livre.

Exemplo 6.1.4. Um espaço vetorial sobre um corpo k é um k -módulo livre, portanto projetivo pela Proposição 6.1.2.

Exemplo 6.1.5. Um grupo finito abeliano G não é um \mathbb{Z} -módulo projetivo, pois não é \mathbb{Z} -livre (novamente pela Proposição 6.1.2).

Exemplo 6.1.6. Sejam p e q primos distintos e $R = \mathbb{Z}_{pq} \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. Pelo item (c) da Proposição 6.1.3 e o fato que R é R -módulo livre com base $\{1\}$, segue que \mathbb{Z}_p e \mathbb{Z}_q são R -projetivos, mas estes não são R -livres.

Existem alguns casos em que não há distinção entre as noções de módulos projetivos e livres.

Teorema 6.1.7. *Um módulo sobre um domínio de ideais principais é projetivo se, e somente se, é livre.*

Teorema 6.1.8. *Um módulo sobre um anel local Noetheriano é projetivo se, e somente se, é livre.*

A noção dual de módulos projetivos são os módulos injetivos. Desse modo, é esperado que tenhamos versões similares dos resultados de módulos projetivos, mas também notaremos suas diferenças.

Definição 6.1.9. Seja R um anel. Um R -módulo E é dito ser *injetivo*, se para qualquer R -módulo N e quaisquer morfismos $g : N \rightarrow E$ e $f : N \rightarrow M$, com f injetor, então existe morfismo $h : M \rightarrow E$ (não necessariamente único) tal que $g = h \circ f$. Costumamos dizer que g foi estendido a h .

Também caracterizamos módulos injetivos através do funtor Hom .

Proposição 6.1.10. *Se R é um anel e E é um R -módulo, então são equivalentes:*

- (a) E é injetivo;
- (b) O funtor $\text{Hom}_R(-, E)$ é exato.

Uma das diferenças notáveis entre módulos projetivos e injetivos é que geralmente módulos livres não são injetivos. Então para começar a produzir exemplos de módulos injetivos precisamos da noção de módulos divisíveis.

Definição 6.1.11. Seja R um domínio de integridade. Um R -módulo é dito ser *divisível* se, cada $m \in M$ pode ser dividido por qualquer elemento não-nulo $r \in R$, isto é, existe $n \in M$ satisfazendo, $rn = m$.

Exemplo 6.1.12. O \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Q} é divisível, pois dados $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{Z}$, temos

$$n \left(\frac{p}{rq} \right) = \frac{p}{q}.$$

Da mesma forma \mathbb{Q}/\mathbb{Z} é \mathbb{Z} -módulo divisível.

Exemplo 6.1.13. O \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z} não é divisível, pois os únicos divisores possíveis de um número inteiro arbitrários são 1 e -1 .

Podemos então relacionar módulos divisíveis e injetivos, não existindo diferença entre essas noções se o anel base é domínio de ideais principais.

Proposição 6.1.14. Se R um domínio de integridade, então todo R -módulo injetivo é divisível. Se R é domínio de ideais principais, então um R -módulo é injetivo se, e somente se, este é divisível.

Exemplo 6.1.15. O Exemplo 6.1.13 e a Proposição 6.1.14 garante que os \mathbb{Z} -módulos \mathbb{Q} e \mathbb{Q}/\mathbb{Z} são injetivos.

6.2 Resoluções e Funtores Derivados

Definição 6.2.1. Uma *resolução à esquerda* de um módulo M é uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Uma resolução à esquerda é dita ser uma *resolução projetiva* (resp. *livre*), se cada P_i é projetivo (resp. livre). É comum considerar a resolução retirando o módulo M .

A categoria de módulos possui “suficientes projetivos”.

Proposição 6.2.2. *Todo módulo possui uma resolução livre (projetiva).*

Passemos à noção dual.

Definição 6.2.3. Uma *resolução à direita* de um módulo M é uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots$$

Uma resolução à direita é dita ser uma *resolução injetiva*, se cada E_i é projetivo.

A categoria de módulos também possui “suficientes injetivos.”

Proposição 6.2.4. *Todo módulo possui uma resolução injetiva.*

Podemos construir a teoria de dimensão de um módulo, baseado nos comprimentos de resoluções projetivas.

Definição 6.2.5. Uma resolução projetiva

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de um módulo M é dita ser de *comprimento* n . O menor comprimento n de uma resolução projetiva de M é chamado *dimensão projetiva* de M e é denotado por $\text{pd}_R(M)$. Se M não possui resolução projetiva de comprimento finito, então definimos $\text{pd}_R(M) = \infty$.

Observação 6.2.6. Era de se esperar que, M ser um módulo projetivo é equivalente a dizer que $\text{pd}_R(M) = 0$. De fato, se M é projetivo, então

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva. Reciprocamente, se

$$0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva, então $P_0 \cong M$, logo M é projetivo.

Exemplo 6.2.7. Considere (R, \mathfrak{m}, k) um anel local Noetheriano e x um elemento R -regular. A sequência exata

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0$$

nos diz que $\text{pd}(R/(x)) = 1$.

Existe também a noção de dimensão injetiva, entretanto nesta dissertação só iremos trabalhar com dimensões projetivas.

Considere R um anel e F um funtor exato à direita sobre a categoria de R -módulos. Se M é um R -módulo e

$$P_{\bullet} : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M . Aplicando o funtor covariante F , obtemos o complexo

$$F(P_{\bullet}) : \cdots \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0.$$

Para cada $i \geq 0$, definimos $R^i F$ o i -ésimo funtor derivado à esquerda do funtor F aplicando em M , como sendo a i -ésima homologia do complexo $F(P_{\bullet})$. Simbolicamente,

$$R_i F(M) = H_i(F(P_{\bullet})).$$

Da mesma maneira, dado um funtor G exato à esquerda e E^{\bullet} uma resolução injetiva de um módulo M , definimos para cada $i \geq 0$, $L^i G$ o i -ésimo funtor derivado à esquerda do funtor G aplicado em M como sendo a i -ésima cohomologia do complexo $G(E^{\bullet})$,

$$L^i G(M) = H^i(G(E^{\bullet})).$$

É mostrado que estas definições não dependem da escolha de resoluções projetivas ou injetivas.

Exemplo 6.2.8. Considere R um anel, M um R -módulo e $i \geq 0$. Se F é o funtor exato à direita $M \otimes_R -$, o i -ésimo funtor torção, denotado por $\text{Tor}_i^R(M, -)$ é o funtor derivado à esquerda $L_i F$. Se G é o funtor exato à esquerda $\text{Hom}_R(M, -)$, o i -ésimo funtor extensão, denotado por $\text{Ext}_R^i(M, -)$ é o funtor derivado à direita $R^i G$. Pode ser mostrado que os funtores Ext podem ser calculados utilizando resoluções projetivas e o funtor Hom contravariante, isto é,

$$\text{Ext}_R^i(M, -) = R^i \text{Hom}_R(-, M).$$

Vejamos algumas propriedades de funtores derivados.

Proposição 6.2.9. Considere R um anel, M um R -módulo, F um funtor exato à direita e G um funtor exato à esquerda. As seguintes propriedades são verificadas:

- (a) $L_0 F(M) \cong F(M)$ e $G(M) \cong R^0 G(M)$;
- (b) Se M é projetivo então $L_i F(M) = 0$, para todo $i > 0$;
- (c) Se M é injetivo então $R^i G(M) = 0$, para todo $i > 0$;
- (d) Qualquer sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

induz sequência exata longa de homologia

$$\cdots \longrightarrow L_i F(A) \longrightarrow L_i F(B) \longrightarrow L_i F(C) \longrightarrow L_{i-1} F(A) \longrightarrow \cdots$$

(e) *Qualquer sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

induz sequência exata longa de cohomologia

$$\cdots \longrightarrow R^i G(A) \longrightarrow R^i G(B) \longrightarrow R^i G(C) \longrightarrow R^{i+1} G(A) \longrightarrow \cdots$$

Podemos caracterizar módulos planos, projetivos e injetivos com a nulidade dos funtores torção e extensão.

Proposição 6.2.10. *Seja R um anel e M um R -módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) M é plano;
- (b) $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$, para todo $n \geq 1$ e todo R -módulo N ;
- (c) $\text{Tor}_1^R(M, N) = 0$, para todo R -módulo N .

Proposição 6.2.11. *Seja R um anel e M um R -módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) M é projetivo;
- (b) $\text{Ext}_R^i(M, N) = 0$, para todo $n \geq 1$ e todo R -módulo N ;
- (c) $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$, para todo R -módulo N .

Proposição 6.2.12. *Seja R um anel e N um R -módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) N é injetivo;
- (b) $\text{Ext}_R^i(M, N) = 0$, para todo $n \geq 1$ e todo R -módulo M ;
- (c) $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$, para todo R -módulo M .

No caso em que o anel base é local, as noções de módulos planos, projetivos e livres coincidem.

Proposição 6.2.13. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local e M um R -módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) M é plano;
- (b) M é projetivo;
- (c) M é livre.

Bibliografia

- [1] ASH, Robert B. *A Course In Commutative Algebra* / Class notes. Urbana: University of Illinois, 2006.
- [2] ASH, Robert B. *Abstract Algebra: The Basic Graduate Year* / Class notes. Urbana: University of Illinois, 2000.
- [3] ATIYAH, M. *Introduction to commutative algebra* / Westview Press: University of Oxford, 1994.
- [4] BAYER, Dave; PEEVA, Irena; STURMFELS, Bernd. *Monomial resolutions* / arXiv preprint alg-geom/9610012, 1996.
- [5] BIGAZZI, A. *Castelnuovo-Mumford regularity for projective curves* / Thesis, Università degli studi “Roma Tre”, 2016.
- [6] BORGES, H., TENGAN E. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos* / Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [7] BRODMANN, M. *Around Castelnuovo-Mumford regularity* / Lecture Notes, University of Zürich (Preliminary Version), 2010.
- [8] BRODMANN M.P., SHARP R.Y. *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications* / Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [9] BRUNS, W., HERZOG J. *Cohen-Macaulay Rings* / Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [10] COSTA, D. A. *Cohomologia Local: noções básicas e aplicações* / Dissertação, Universidade Federal de Sergipe: 2017.
- [11] EISENBUD, D. *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry* / Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer: 1999.
- [12] EISENBUD, D. *The Geometry of Syzygies: A second course in Commutative Algebra and Algebraic Geometry* / Berkeley: University of California, 2002.
- [13] MARLEY, T. *Graded rings and modules* / Some notes based on a five-week course, 1993.

- [14] MCCULLOUGH, J; PEEVA I. *Infinite graded free resolutions / Commutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, 2016.
- [15] REZENDE, J. É. de J. *O número graduado de Betti / Dissertação*, Universidade Federal de Sergipe: 2013.
- [16] ROSSI, M. E., TRUNG, N., VALLA G. *Castelnuovo-Mumford regularity and finiteness of Hilbert functions / Commutative algebra*, Lect. Notes Pure Appl. Math 244 (2005): 193-209.
- [17] ROTMAN, J. J. *An introduction to homological algebra / Springer Science and Business Media*, 2008.